Курсовая работа:

Режим переконденсации с компактным распределением размеров капель.

Digitally signed by Родион
DN: cn=Родион, c=RU, o=СП, ou=Кафедра статфизики СПБГУ, email=first-principle@ya.ru
Reason: Я автор документа
Location: Санкт-Петербург
Date: 2008.05.30 10:03:52 +03'00'

Выполнил: Телятник Родион, 306 группа

Подпись: 

Научный руководитель: Аджемян Лоран Цолакович

Подпись:

30 мая 2008

Описание проблемы и постановка задачи.

Классические работы Дж.Гиббса, М.Фольмера, Ф.Беккера, В.Дёринга, Я.Френкеля, Я.Зельдовича по физике фазовых переходов I рода относятся к ранним стадиям зарождения новой фазы.

В данной же работе нас интересует процесс конденсации, переходящий из флуктуационного режима роста зародышей новой фазы в стадию переконденсации, именуемую также коалесценцией, или Оствальдовским созреванием [1] , когда рост крупных капель происходит за счёт растворения более мелких (при условии, что все капли далеки друг от друга).

Режим переконденсации может проходить в одном случае под управлением поглощающей способности поверхности (теория Вагнера: [2]), когда длина свободного пробега λ молекулы много больше радиуса капли R, а в другом случае под управлением диффузии в паре (теория Лифшица-Слёзова: [3] ,[4]), когда $\lambda \ll R$.

Причиной расхождения эксперимента с теорией Лифшица-Слёзова-Вагнера оказалось допущение неограниченного объёма кластеров новой фазы [5] . Поэтому все дальнейшие теоретические исследования Оствальдовского созревания предполагают компактное основание распределения капель по размерам [6] ,[7] ,[8] .

Поэтому задачей данной работы является описание уравнений и параметров режима переконденсации в условиях существования максимального размера капли.

Коалесценция имеет большое практическое значение, например, в образовании и стабильности поверхностей [9] ,[10] ,[11] .

Оглавление

Курсовая работа:
Режим переконденсации с компактным распределением размеров капель.

Описание проблемы и постановка задачи. 1

Оглавление 2

1). Переписывание уравнений в терминах максимальной капли. 3

2). Соотношения интегральных моментов функции распределения. 5

3). Нахождение автомодельной функции распределения. 6

4). Нормировка функции распределения. 9

5). Предельный случай – распределение Лифшица-Слёзова. 10

6). Графики. 11

7). Литература. 12

8) Ссылки 12

1). Переписывание уравнений в терминах максимальной капли.

Оригинальные уравнения теории переконденсации записываются в терминах отношения безразмерного радиуса капли к её критическому радиусу в зависимости от безразмерного времени: $u(\tau) = \dfrac{a}{a_c(\tau)}$. Наша задача – переписать их в терминах отношения радиуса капли к максимальному радиусу: $v(\tau) = \dfrac{a}{a_m(\tau)} \in (0,1]$.

Уравнение роста радиуса капли в режиме коалесценции Лифшица-Слёзова:

$$\partial_\tau a(\tau) = \frac{1}{a(\tau)}\left(\frac{1}{a_c(\tau)} - \frac{1}{a(\tau)}\right) \tag{1.1}$$

Тогда уравнение непрерывности для функции распределения по размерам капель:

$$\partial_\tau f(a,\tau) = -\partial_a\left(\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a_c} - \frac{1}{a}\right)\cdot f(a,\tau)\right) \tag{1.2}$$

Подставляем сюда асимптотический анзац Лифшица-Слёзова в новых переменных и с явной зависимостью от времени:

$$f(a,\tau) = N\frac{1}{a_m{}^4(\tau)}P\left(v(\tau),\tau\right) \tag{1.3}$$

Преобразуем дифференциальное уравнение (обозначая $\dot{a}_m(\tau) \equiv \dfrac{d}{d\tau}a_m(\tau)$):

$$-4\frac{\dot{a}_m}{a_m{}^5}P - \frac{a}{a_m{}^2}\dot{a}_m\frac{1}{a_m{}^4}\partial_v P + \frac{1}{a_m{}^4}\partial_\tau P = \frac{1}{a_m{}^4}\left(\frac{1}{a^2 a_c} - \frac{2}{a^3}\right)P - \frac{1}{a_m{}^4}\left(\frac{1}{aa_c} - \frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{a_m}\partial_v P$$

$$-4\dot{a}_m P - \dot{a}_m v\partial_v P + a_m\partial_\tau P = \left(\frac{1}{a_m a_c v^2} - \frac{2}{a_m{}^2 v^3}\right)P - \left(\frac{1}{a_m a_c v} - \frac{1}{a_m{}^2 v^2}\right)\partial_v P$$

$$\left(-\frac{1}{a_m{}^2 v^2} + \frac{1}{a_m a_c v} - \dot{a}_m v\right)\partial_v P + a_m\partial_\tau P = \frac{1}{a_m{}^2}\left(\frac{a_m}{a_c v^2} - \frac{2}{v^3} + 4\dot{a}_m a_m{}^2\right)P$$

Введём

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{\dot{a}_m(\tau)\cdot a_m{}^2(\tau)} \tag{1.4}$$

$$\left(-\gamma\frac{1}{v^2} + \gamma\frac{a_m}{a_c}\frac{1}{v} - v\right)\partial_v P + \frac{a_m}{\dot{a}_m}\partial_\tau P = \left(\gamma\frac{a_m}{a_c}\frac{1}{v^2} - 2\gamma\frac{1}{v^3} + 4\right)P$$

$$\left(-\gamma+\gamma\frac{a_m}{a_c}v-v^3\right)v\partial_v P+\frac{a_m}{\dot a_m}v^3\partial_\tau P=\left(\gamma\frac{a_m}{a_c}v-2\gamma+4v^3\right)P \quad (1.5)$$

Избавимся от a_c, подставив a_m в уравнение роста радиуса капли (1.1):

$$\dot a_m=\frac{1}{a_m}\left(\frac{1}{a_c}-\frac{1}{a_m}\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{a_m}{a_c}=\frac{1}{\gamma}+1 \quad (1.6)$$

С учётом этого, а также определения $\gamma(\tau)$ в (1.4), докажем, что $v=1$ является корнем кубического полинома:

$$G_3(v)=-\gamma+\gamma\frac{a_m}{a_c}v-v^3 \quad (1.7)$$

$$-\gamma+\gamma\frac{a_m}{a_c}-1=-\frac{1}{\dot a_m a_m{}^2}+\frac{1}{a_c\dot a_m a_m}-1=\frac{1}{a_c a_m{}^2\dot a_m}\left(-a_c+a_m-a_c a_m{}^2\dot a_m\right)=$$

$$=\frac{1}{a_c\dot a_m a_m{}^2}\left(-a_c+a_m-a_c a_m{}^2\left(\frac{1}{a_m a_c}-\frac{1}{a_m{}^2}\right)\right)=\frac{1}{a_c\dot a_m a_m{}^2}\left(-a_c+a_m-a_m+a_c\right)\equiv 0$$

Тогда (1.5) окончательно запишется следующим уравнением на функцию распределения:

$$\boxed{\underbrace{\left(-\gamma+(\gamma+1)v-v^3\right)}_{G_3(v)}v\partial_v P+a_m\gamma v^3\partial_\tau P=\underbrace{\left((\gamma+1)v-2\gamma+4v^3\right)}_{H_3(v)}P} \quad (1.8)$$

Зная один корень, найдём делением по схеме Горнера квадратичное выражение в $G_3(v)=(v-1)G_2(v)$

корень					
	$G_3(v)$	v^3	v^2	v^1	v^0
		-1	0	$\gamma+1$	$-\gamma$
1	$G_2(v)$	v^2	v^1	v^0	остаток
		-1	$0+(-1)\cdot 1$	$(\gamma+1)+(-1)\cdot 1$	$-\gamma+\gamma$

остаток = нулю

Таким образом:

$$G_2(v)=-v^2-v+\gamma$$

Решим квадратное уравнение, полагая корни существующими:

$$v=-\frac{1\pm\sqrt{1+4\gamma}}{2}=-\frac{1}{2}\mp\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}$$

Тем самым мы разложили на множители $G_3(v)=-(v_1-v)(v-v_2)(v_3-v)$, где

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma} \qquad v_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma} \qquad \gamma \ge -\frac{1}{4} \tag{1.9}$$

Каждая скобка в таком виде разложения, как мы увидим далее, будет положительна. Заметим также, что $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ (так что $v_2 = -v_3 - 1$), что, впрочем, сразу следует из теоремы Виета для $G_3(v)$ по отсутствию квадратичного члена.

Итак, уравнение (1.8) запишется следующим образом:

$$(1-v)\left(v + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \gamma}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \gamma} - \frac{1}{2} - v\right) v\partial_v P + a_m \gamma v^3 \partial_\tau P = \left(-4v^3 - (\gamma+1)v + 2\gamma\right) P \tag{1.10}$$

В этой работе мы рассмотрим автомодельную функцию $P = P(v)$, не зависящую явно от времени, при этом в полученном дифференциальном уравнении опускается член $a_m \gamma v^3 \partial_\tau P$ с частной производной по времени от функции распределения.

2). Соотношения интегральных моментов функции распределения.

Соотношения между интегральными моментами функции распределения можно найти, не зная её явного вида. Для этого проинтегрируем от 0 до 1 левую и правую части дифференциального уравнения (1.8), опуская член с производной по времени и вводя моменты:

$$M_n = \int_0^1 v^n P(v) dv \tag{2.1}$$

$$\int_0^1 \left(-\gamma + (\gamma+1)v - v^3\right) v \frac{dP}{dv} dv = \int_0^1 \left((\gamma+1)v - 2\gamma + 4v^3\right) P dv = (\gamma+1)M_1 - 2\gamma M_0 + 4M_3$$

Интегрируем по частям левую часть:

$$\underbrace{vG(v)P(v)\Big|_0^1}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \int_0^1 P(v) \frac{d}{dv}\left(\gamma v - (\gamma+1)v^2 + v^4\right) dv = (\gamma+1)M_1 - 2\gamma M_0 + 4M_3$$

$$\int_0^1 P(v)\left(\gamma - 2(\gamma+1)v + 4v^3\right) dv = (\gamma+1)M_1 - 2\gamma M_0 + 4M_3$$

$$\gamma M_0 - 2(\gamma+1)M_1 + \cancel{4M_3} = (\gamma+1)M_1 - 2\gamma M_0 + \cancel{4M_3}$$

$$3\gamma M_0 = 3(\gamma+1)M_1$$

$$\frac{M_1}{M_0} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \tag{2.2}$$

Это выражение, в сущности, означает, что $\bar{v} \equiv \frac{\bar{a}}{a_m} = \frac{\gamma}{\gamma+1}$, а если вспомнить отношение (1.6) между максимальным и критическим радиусами капли, то получим равенство среднего и критического радиусов:

$$\bar{a} = a_m \frac{\gamma}{\gamma+1} = a_c \tag{2.3}$$

$M_0 = 1$, когда функция распределения нормирована на единицу (см. пункт 4)

3). Нахождение автомодельной функции распределения.

По-прежнему полагая автомодельным $P = P(v)$ и убирая в (1.10) член с производной по времени, можно явно решить дифференциальное уравнение интегрированием:

$$\int \frac{dP}{P} = \int \frac{-4v^3 - (\gamma+1)v + 2\gamma}{v(1-v)\left(v + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2} - v\right)} dv \tag{3.1}$$

Для этого разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби и найдём коэффициенты:

$$\frac{A}{v} + \frac{B}{1-v} + \frac{C}{v + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} + \frac{D}{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2} - v} = \frac{-4v^3 - (\gamma+1)v + 2\gamma}{v(1-v)\left(v + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2} - v\right)}$$

$$A(1-v)\left(v + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2} - v\right) + Bv\left(v + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2} - v\right) +$$

$$+Cv(1-v)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2} - v\right) + Dv(1-v)\left(v + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right) = -4v^3 - (\gamma+1)v + 2\gamma$$

При $v = 0$:

$$A\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2}\right) = 2\gamma \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{2\gamma}{\left(\gamma + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}} = 2$$

При $v = 1$:

$$B\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{3}{2}\right) = -4 - (1+\gamma) + 2\gamma \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\gamma - 5}{\gamma + \frac{1}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{\gamma - 5}{\gamma - 2}$$

Приравнивание коэффициентов при v^3:

$$A - B + C - D = -4 \quad \overset{A=2}{\Rightarrow} \quad C = -6 + D + B$$

Приравнивание коэффициентов при v^2 (находим D):

$$-A\left(\cancel{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} - \frac{1}{2}\right) + A\left(\cancel{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} + \frac{1}{2}\right) - A + B\left(\cancel{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} - \frac{1}{2}\right) - B\left(\cancel{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} + \frac{1}{2}\right) - C\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2}\right) - C - D\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{1}{2}\right) + D = 0$$

$$-B - C\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{1}{2}\right) = D\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2}\right)$$

$$-B - (-6 + D + B)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{1}{2}\right) = D\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2}\right)$$

$$-B + 6\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{1}{2}\right) - B\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{1}{2}\right) = D\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{1}{2}\right)$$

$$D = \frac{6\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + 3 - B\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + \frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} = 3 + \frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} - \frac{B}{2}\left(1 + \frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}}\right)$$

$$D = 2 + \left(1 - \frac{B}{2}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}} + 1\right) \tag{3.2}$$

Подставляя полученное выражение для B, выразим D только через γ и избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$D = 2 + \frac{\gamma+1}{2(\gamma-2)} \cdot \frac{9 - 4\left(\frac{1}{4}+\gamma\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\left(3 - 2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)} = 2 + \frac{\gamma+1}{\gamma-2} \cdot \frac{2-\gamma}{3\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} - 2\gamma - \frac{1}{2}}$$

$$D = 2 - \frac{(\gamma+1)\left(3\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma} + 2\gamma + \frac{1}{2}\right)}{9\left(\frac{1}{4}+\gamma\right) - 4\gamma^2 - 2\gamma - \frac{1}{4}} = 2 + \frac{2\gamma^2 + \frac{5}{2}\gamma + \frac{1}{2} + 3(\gamma+1)\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}}{4\gamma^2 - 7\gamma - 2}$$

$$D=\frac{10\gamma^2-\frac{23}{2}\gamma-\frac{7}{2}+3(\gamma+1)\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}}{(4\gamma+1)(\gamma-2)} \tag{3.3}$$

Таким образом, найдены все коэффициенты в разложении на простые дроби подынтегрального выражения в (3.1), интегрируя их, получаем, помня об области определения переменных:

$$\widetilde{Const}(\gamma)+\ln P=2\ln v-B\ln(1-v)+(-6+D+B)\ln\left(v+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)-D\ln\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}-\frac{1}{2}-v\right)$$

$$P=Const(\gamma)\cdot v^2(1-v)^{-B}\left(v+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)^{-6+D+B}\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}-\frac{1}{2}-v\right)^{-D}$$

В значениях v_3 (третий корень $G_3(v)$) из (1.9) окончательно запишем:

$$\boxed{P(v)=Const(\gamma)\cdot\frac{v^2(1-v)^{\mu}}{(v+1+v_3)^{6+\mu-D}(v_3-v)^{D}}} \tag{3.4}$$

Где в силу физической ограниченности функции распределения на конце интервала, полагаем:

$$P(1)<\infty \quad\Rightarrow\quad \mu\equiv -B=\frac{5-\gamma}{\gamma-2}\in[0,+\infty) \quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{2\mu+5}{\mu+1}\in(2,5] \tag{3.5}$$

Оценим выражение для D из (3.2):

$$D=2+\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}}+1\right)\in\left[3\left(1+\frac{1}{\sqrt{21}}\right),+\infty\right)\subset[3.654,+\infty) \tag{3.6}$$

Дифференцированием (3.3) и грубой оценкой можно увидеть, что D монотонно убывает по γ из бесконечности, как и μ. При этом величина $\mu-D$, фигурирующая в (3.4), остаётся ограниченной (не имеет особенности при $\gamma=2$), более того почти постоянной в заданном интервале γ, в чём можно убедиться, вычитая D в форме (3.6) из μ и выражая всё через γ:

$$\mu-D=-4-\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{3}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}}-1\right)=-4-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-2)}\cdot\frac{9-4\left(\frac{1}{4}+\gamma\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\left(3+2\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}\right)}=$$

$$= -4 + \frac{\gamma+1}{\cancel{2-\gamma}} \cdot \frac{\cancel{2-\gamma}}{3\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma+2\left(\frac{1}{4}+\gamma\right)}} = \frac{\gamma+1}{2\gamma+3\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}+\frac{1}{2}} - 4$$

$$\mu - D = \frac{\gamma+1}{2\gamma+3\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}+\frac{1}{2}} - 4 \quad \in \left[-\frac{11}{3}, -3\left(1+\frac{1}{\sqrt{21}}\right)\right] \quad \subset \left[-3.667, -3.654\right] \qquad (3.7)$$

4). Нормировка функции распределения.

Как в пункте 2 проинтегрируем от 0 до 1 левую и правую части (1.8) (без члена с производной по времени), предварительно разделив их на v^3:

$$\int_0^1 \left(-\frac{\gamma}{v^2} + \frac{(\gamma+1)}{v} - v\right) \partial_v P dv = \int_0^1 \left(\frac{(\gamma+1)}{v^2} - \frac{2\gamma}{v^3} + 4\right) P(v) dv$$

Формально интегрируем по частям левую часть:

$$\left(-\frac{\gamma}{v^2} + \frac{(\gamma+1)}{v} - v\right) P(v) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\cancel{2\frac{\gamma}{v^3}} - \cancel{\frac{(\gamma+1)}{v^2}} - 1\right) P(v) dv = \int_0^1 \left(\cancel{\frac{(\gamma+1)}{v^2}} - \cancel{2\frac{\gamma}{v^3}} + 4\right) P(v) dv$$

$$-\left(-\frac{\gamma}{v^2} + \frac{(\gamma+1)}{v} - v\right) P(v) \Big|_{v=0} = 3\int_0^1 P(v) dv$$

$$\int_0^1 P(v) dv = \frac{1}{3}\left(\frac{\gamma}{v^2} - \frac{(\gamma+1)}{v} + v\right) P(v) \Big|_{v=0}$$

Удовлетворяя условию нормировки, подставим $P(v)$ из (3.4). При $v=0$ сохранится только первый член:

$$1 = \int_0^1 P(v) dv = Const(\gamma) \frac{\gamma}{3} \frac{1}{(1+v_3)^{6+\mu-D} {v_3}^D}$$

$$Const(\gamma) = \frac{3}{\gamma}(1+v_3)^{6+\mu-D} {v_3}^D \qquad (4.1)$$

Так что функция распределения (3.4) в нормированном виде равна:

$$\boxed{P(v) = \frac{3}{\gamma} \frac{v^2 (1-v)^\mu}{\left(1+\frac{v}{1+v_3}\right)^{6+\mu-D} \left(1-\frac{v}{v_3}\right)^D}} \qquad (4.2)$$

Из самого дифференциального уравнения (1.10) легко выписать производную функции распределения:

$$\frac{dP(v)}{dv}=\frac{3}{\gamma}\frac{v^2(1-v)^{\mu-1}\left(-4v^3-(\gamma+1)v+2\gamma\right)}{v_3(1+v_3)\left(1+\frac{v}{1+v_3}\right)^{7+\mu-D}\left(1-\frac{v}{v_3}\right)^{D+1}} \tag{4.3}$$

Приравняв её нулю и решая каноническое кубическое уравнение $v^3+\frac{(\gamma+1)}{4}v-\frac{\gamma}{2}=0$ по формуле Кардано, имеем для максимума функции распределения, изменяющего своё положение с изменением γ:

$$v_m=\sqrt[3]{\frac{\gamma}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2+\frac{(\gamma+1)^3}{108}}}+\sqrt[3]{\frac{\gamma}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2+\frac{(\gamma+1)^3}{108}}} \tag{4.4}$$

$$\gamma\in(2,5]\quad\Rightarrow\quad v_m\in\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{17}}-\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}\right),1\right]\subset(0.756,1]$$

5). Предельный случай – распределение Лифшица-Слёзова.

Рассмотрим предельный случай при $\gamma\to 2+$. При этом из (3.3) $\Rightarrow$ $D\underset{\gamma\to2+}{\sim}\frac{3}{\gamma-2}$, а из (3.5) $\Rightarrow$ $\mu\underset{\gamma\to2+}{\sim}\frac{3}{\gamma-2}$. Тогда как их разность $\mu-D\xrightarrow[\gamma\to2]{}-\frac{11}{3}$, что было показано в (3.7). Нам также пригодится асимптотика: $v_3-1=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}=\frac{\gamma-2}{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma}}\underset{\gamma\to2+}{\sim}\frac{\gamma-2}{3}$

$$P_{LS}(v)=\lim_{\gamma\to2+}\frac{3}{\gamma}\frac{v^2(1-v)^{\mu}}{\left(1+\frac{v}{1+v_3}\right)^{6+\mu-D}\left(1-\frac{v}{v_3}\right)^{D}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{v^2}{\left(1+\frac{v}{2}\right)^{6+\mu-D|_{\gamma=2}}(1-v)^{D-\mu|_{\gamma=2}}}\cdot\lim_{\gamma\to2+}\left(\frac{1-v}{1-\frac{v}{v_3}}\right)^{D}$$

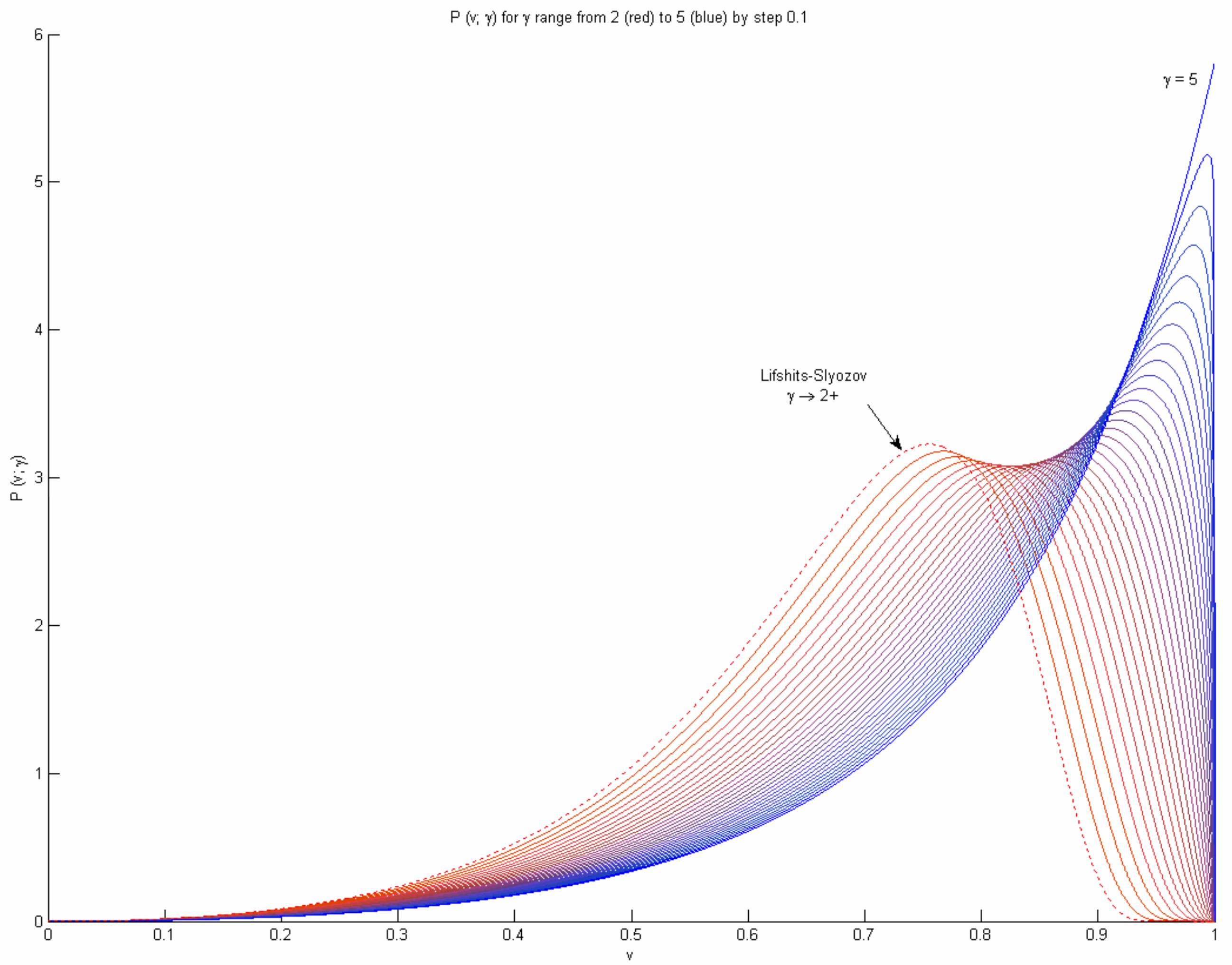
$$\lim_{\gamma\to2+}\left(\frac{1-v}{1-\frac{v}{v_3}}\right)^{D}=\lim_{\gamma\to2+}\left(1+\frac{\frac{v}{v_3}-v}{1-\frac{v}{v_3}}\right)^{D}=\lim_{\gamma\to2+}\left(1-\frac{v}{v_3-v}(v_3-1)\right)^{D}=\lim_{\gamma\to2+}\left(1-\frac{v}{v_3-v}\frac{\gamma-2}{3}\right)^{\frac{3}{\gamma-2}}=e^{\lim\limits_{\gamma\to2+}\left(-\frac{v}{v_3-v}\right)}$$

$$\boxed{P_{LS}(v)=\frac{3}{2}\cdot\frac{v^2}{\left(1+\frac{v}{2}\right)^{\frac{7}{3}}(1-v)^{\frac{11}{3}}}\exp\left(-\frac{v}{1-v}\right)} \tag{5.1}$$

Приведём для сравнения функцию Лифшица-Слёзова, записанную в оригинальных переменных $u = \dfrac{a}{a_c(\tau)}$:

$$P_{LS}(u) = \frac{81}{16} \cdot \frac{u^2}{\left(\frac{3}{2}+\frac{u}{2}\right)^{\frac{7}{3}} \left(\frac{3}{2}-u\right)^{\frac{11}{3}}} \exp\left(-\frac{u}{\frac{3}{2}-u}\right) \quad , u \le \frac{3}{2} \tag{5.2}$$

6). Графики.



Здесь нарисованы функции распределения $P(v;\gamma)$ из (4.2), охватывающие весь интервал возможных γ вплоть до функции Лифшица-Слёзова (5.1).

7). Литература.

1. А.Н.Васильев, А.К.Казанский, Л.Ц.Аджемян: «*Переконденсация пересыщенного пара: аналитические теории и численный эксперимент*».
2. П.Губанов, Ю.Желтов, И.Максимов, В.Морозов: «*Кинетический кроссовер режимов коалесценции в пересыщенном однородном растворе*».
3. В.Бойко, Х.Могель, В.Сысоев, А.Чалый «*Особенности метастабильных состояний при фазовых переходах жидкость-пар*»
4. В.Ф.Разумов: «*Курс лекций по синергетике*».
5. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский: «*Физическая кинетика*».
6. B.Giron, B.Meerson, P.V.Sasorov: «*Weak selection and stability of localized distributions in Ostwald ripening*».
7. V.M.Burlakov: «*Ostwald Ripening on nanoscale*».
8. B.Niethammer, R.L.Pego: «*Non-self-similar behavior in the LSW theory of Ostwald ripening*».

Перечисленные и многие другие материалы по теме временами доступны по ftp здесь: ftp://rodion.homeftp.net → Work → =Учёба= → Кафедра статфизики → =Курсовая= → Литература

8) Ссылки

[1] W.Z.Ostwald // *Phys. Chem.* **37**, 385 (1901)

[2] C.Z.Wagner // *Electrochem.* **65**, 581 (1961)

[3] М.Лифшиц, В.Слёзов // *ЖЭТФ* **35**, 479 (1958)

[4] M.Lifshitz, V.Slyozov // *J.Phys.Chem.Solids* **19**, 35 (1961)

[5] J. Alkemper, V.Snyder, N.Akaiwa, P.Voorhees // *Phys.Rev.Lett.* **82**, 2725 (1999)

[6] N.Akaiwa, P.Voorhees // *Phys.Rev.B* **49**, 3860 (1994)

[7] D.Fan, S.Chen, L.Chen, P.Voorhees // *ActaMaterialia* **50**, 1895 (2002)

[8] K.Wang, M.Gliksman, K.Rajan // *Comput.Mat.Sci.* **34**, 235 (2005)

[9] S.Kukushkin, A.Osipov // *Progress in Surf. Sci.* **51**, 1 (1996)

[10] M.Zinke-Allmang, L.Feldman, M.Grabow // *Surf. Sci.Rep.* **16**, 377 (1992)

[11] W. Bartelt, C.Theis, M.Tromp // *Phys.Rev. B* **54**, 11741 (1996)