

Анализ в частотной области

$$U_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\frac{1}{pC_1}} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} \right) - U_4 \left(\frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} \right) = U_1 \cdot pC_1 \text{ substitute } U_4 = \frac{U_2}{k_u} \rightarrow \frac{U_3 \cdot k_u - p \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot U_2 + p \cdot C_1 \cdot R_1 \cdot U_3 \cdot k_u + p \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot U_3 \cdot k_u + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_3 \cdot k_u + p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot U_3 \cdot k_u}{(p \cdot C_2 \cdot R_2 + 1) \cdot R_1 \cdot k_u} = p \cdot C_1 \cdot U_1$$

$$U_4 \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} \right) - U_3 \left(\frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} \right) = \frac{U_2}{R_3} \text{ substitute, } U_4 = \frac{U_2}{k_u} \rightarrow \frac{U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot U_2 - p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot U_3 \cdot k_u}{(p \cdot C_2 \cdot R_2 + 1) \cdot R_3 \cdot k_u} = \frac{U_2}{R_3}$$

$$U_2 = k_u \cdot U_4 \text{ solve, } U_4 \rightarrow \frac{U_2}{k_u}$$

$$\frac{U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot U_2 - p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot U_3 \cdot k_u}{(p \cdot C_2 \cdot R_2 + I) \cdot R_3 \cdot k_u} = \frac{U_2}{R_3} \text{ solve, } U_3 \rightarrow \frac{U_2 - U_2 \cdot k_u + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot U_2 - p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2 \cdot k_u}{p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot k_u}$$

$$\frac{U_3 \cdot k_u - p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot U_2 + p \cdot C_I \cdot R_I \cdot U_3 \cdot k_u + p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot U_3 \cdot k_u + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_3 \cdot k_u + p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2 \cdot U_3 \cdot k_u}{(p \cdot C_2 \cdot R_2 + I) \cdot R_I \cdot k_u} = U_I \cdot p \cdot C_I \text{ substitute, } U_3 = \frac{U_2 - U_2 \cdot k_u + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot U_2 - p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2 \cdot k_u}{p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot k_u} \rightarrow \frac{U_2 - U_2 \cdot k_u + p \cdot C_I \cdot R_I \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2}{p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot k_u}$$

$$\frac{U_2 - U_2^k_u + p \cdot C_I \cdot R_I \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2 + p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot U_2 - p \cdot C_I \cdot R_I \cdot U_2^k_u - p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot U_2^k_u - p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot U_2^k_u + p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2 \cdot U_2 + p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_3 \cdot U_2 - p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2 \cdot U_2^k_u}{p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_3 \cdot k_u} = p \cdot C_I \text{ substitute, } U_2 = H_u \rightarrow \frac{H_u - H_u^k_u + p \cdot C_I \cdot R_I \cdot U_2}{p \cdot C_I \cdot R_I \cdot U_2}$$

$$\frac{H_u - H_u \cdot k_u + p \cdot C_I \cdot R_I \cdot H_u + p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot H_u + p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot H_u + p \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot H_u - p \cdot C_I \cdot R_I \cdot H_u \cdot k_u - p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot H_u \cdot k_u - p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot H_u \cdot k_u + p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2 \cdot H_u + p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_3 \cdot H_u - p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2 \cdot H_u \cdot k_u}{p \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_3 \cdot k_u} = p \cdot C_I \text{ solve, } H_u \rightarrow \frac{p \cdot C \cdot R \cdot k + p \cdot C \cdot R + p \cdot C \cdot k}{p \cdot C \cdot R \cdot k + p \cdot C \cdot R + p \cdot C \cdot k}$$

$$H_u = \frac{p^2 \cdot C_l \cdot C_2 \cdot R_l \cdot R_3 \cdot k_u}{p \cdot C_l \cdot R_l - k_u + p \cdot C_2 \cdot R_l + p \cdot C_2 \cdot R_2 + p \cdot C_2 \cdot R_3 - p \cdot C_l \cdot R_l \cdot k_u - p \cdot C_2 \cdot R_l \cdot k_u - p \cdot C_2 \cdot R_2 \cdot k_u + p^2 \cdot C_l \cdot C_2 \cdot R_l \cdot R_2 + p^2 \cdot C_l \cdot C_2 \cdot R_l \cdot R_3 - p^2 \cdot C_l \cdot C_2 \cdot R_l \cdot R_2 \cdot k_u + l}$$

$$H_u = \frac{p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_3}{0 - 1 + 0 + 0 + 0 - p \cdot C_1 \cdot R_1 - p \cdot C_2 \cdot R_1 - p \cdot C_2 \cdot R_2 + 0 + 0 - p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 0} \xrightarrow{\text{simplify}} H_u = - \frac{p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_3}{p \cdot C_1 \cdot R_1 + p \cdot C_2 \cdot R_1 + p \cdot C_2 \cdot R_2 + p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + 1}$$

$$H_u = - \frac{p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_3}{p \cdot C_1 \cdot R_1 + p \cdot C_2 \cdot R_1 + p \cdot C_2 \cdot R_2 + p^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2 + I}$$

$$-\frac{p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_3}{p \cdot C_I \cdot R_I + p \cdot C_2 \cdot R_I + p \cdot C_2 \cdot R_2 + p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2 + I} \xrightarrow{\text{collect}, p} -\frac{p^2 \cdot C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_3}{C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2 \cdot p^2 + (C_I \cdot R_I + C_2 \cdot R_I + C_2 \cdot R_2) \cdot p + I}$$

$$H_u = -\frac{p^2 \cdot C_l \cdot C_2 \cdot R_l \cdot R_3}{C_l \cdot C_2 \cdot R_l \cdot R_2 \cdot p^2 + (C_l \cdot R_l + C_2 \cdot R_l + C_2 \cdot R_2) \cdot p + l}$$

$$H_u = - \frac{\frac{R_3}{R_2} p^2}{p^2 + \frac{C_I \cdot R_I + C_2 \cdot R_I + C_2 \cdot R_2}{C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2} \cdot p + \frac{I}{C_I \cdot C_2 \cdot R_I \cdot R_2}}$$

Выражение схемной операторной функции ARC-цепи

Фильтр высоких частот

По виду передаточной функции можно определить, что исследуемый фильтр является фильтром высоких частот (ФВЧ), т.к. коэффициент при p^2 в числителе не равен нулю.

Общая форма получившейся передаточной функции имеет вид:

$$H(p)=\frac{p^2\cdot b_2+p\cdot b_1+b_0}{p^2+\frac{\omega_{рез}}{Q}\cdot p+\omega_{рез}^2}$$

Отсюда можно рассчитать резонансную частоту $\omega_{рез}$ и добротность Q исследуемого фильтра:

$$\begin{aligned}(\omega p)^2 &= \frac{I}{C_1\cdot C_2\cdot R_1\cdot R_2} \text{ solve, } \omega p \rightarrow \left(\frac{\frac{I}{\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_2}}}{-\frac{I}{\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_2}}} \right) \\ \frac{\omega p}{Q} &= \frac{C_1\cdot R_1 + C_2\cdot R_1 + C_2\cdot R_2}{C_1\cdot C_2\cdot R_1\cdot R_2} \text{ substitute, } \omega p = \frac{I}{\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_2}} \rightarrow \frac{I}{Q\cdot\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_2}} = \frac{C_1\cdot R_1 + C_2\cdot R_1 + C_2\cdot R_2}{C_1\cdot C_2\cdot R_1\cdot R_2} \\ \frac{I}{Q\cdot\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_2}} &= \frac{C_1\cdot R_1 + C_2\cdot R_1 + C_2\cdot R_2}{C_1\cdot C_2\cdot R_1\cdot R_2} \text{ solve, } Q \rightarrow \frac{\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_2}}{C_1\cdot R_1 + C_2\cdot R_1 + C_2\cdot R_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_1 &:= 0.1\cdot 10^3 & U &:= 8 \\ R_2 &:= 0.2\cdot 10^3 & S &:= 3 \\ R_3 &:= 0.6\cdot 10^3 & n &:= 3 \\ C_1 &:= 2.9\cdot 10^{-9} \\ C_2 &:= 2.5\cdot 10^{-9}\end{aligned}$$

$$Q:=\frac{\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{C_2}\cdot\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_2}}{C_1\cdot R_1 + C_2\cdot R_1 + C_2\cdot R_2} \qquad Q = 0.366 \qquad \text{Добротность фильтра}$$

$$\omega p := \sqrt{\frac{I}{C_1\cdot C_2\cdot R_1\cdot R_2}} \qquad \omega p = 2.626 \times 10^6 \qquad \text{Резонансная частота}$$

Для построения амплитудно- и фазо-частотных характеристик (АЧХ и ФЧХ соответственно) необходимо в полученной передаточной функции $H(p)$ заменить переменную p на комплексную переменную $j \cdot \omega$, где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. Причем АЧХ – модуль полученного комплексного числа - $|H(j \cdot \omega)|$, ФЧХ – аргумент полученного комплексного числа - $\arg(H(j \cdot \omega))$

$$K_u := \frac{R_3}{R_2} \qquad K_u = 3$$

$$j := \sqrt{-1} \qquad \text{Обознаение мнимой единицы} \qquad \text{Коэффициент передачи по напряжению}$$

$$K_u = -\frac{\frac{R_3}{R_2} \cdot (j \cdot \omega)^2}{(j \cdot \omega)^2 + \frac{C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot (j \cdot \omega) + \frac{1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}} \rightarrow K_u = \frac{3.0 \cdot \omega^2}{(7.1724137931034482759e6i) \cdot \omega - \omega^2 + 6.8965517241379310345e12}$$

$$\omega := \frac{\omega p}{n} \qquad \omega = 8.754 \times 10^5$$

$$T := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega} \qquad T = 7.178 \times 10^{-6}$$

$$\tau := \frac{T}{S} \qquad \tau = 2.393 \times 10^{-6}$$

$$Hu(p) := -\frac{\frac{R_3}{R_2} \cdot p^2}{p^2 + \frac{C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}}$$

$$U11(t) := if\left(t < -\frac{\tau}{2}, 0, if\left(t > \frac{\tau}{2}, 0, U\right)\right)$$

$$K := 100$$

$$k := 1..K \qquad b_0 := \frac{U}{S} \qquad b_0 = 2.667$$

$$a_0 := 0 \qquad a_k := 0$$

$$b_k := 2 \cdot U \cdot \tau \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)}{T \cdot k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}}$$

$$U12(t) := b_0 + \sum_{k=1}^K \left(a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t)\right)$$

Определение спектров периодических сигналов

Периодический сигнал – воздействие $f(t)$ - может быть представлен бесконечной суммой синусоид кратных частот – рядом Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)$$

Но практически реализовать бесконечную сумму невозможно, потому используют усеченный ряд Фурье, когда верхний предел конечен и равен K . При этом в теории цепей удобнее использовать комплексную форму ряда Фурье, которая получается из исходного заменой тригонометрических функций комплексными экспонентами с помощью формул Эйлера. В результате получается ряд Фурье для входного импульсного воздействия:

$$U_1(t) = \frac{A_0}{2 \cdot j} + \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \sum_{k=1}^K (A_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot t} + \overline{A_k} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot t})$$

$$\text{или } U_1(t) = \text{Im}(A_0 + \sum_{k=1}^K A_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t})$$

$$\omega = \frac{\omega_{рез}}{n} \text{ - частота основной гармоники, которой кратны все суммы}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \text{ - период входного воздействия}$$

$$\tau = \frac{T}{S} \text{ - длительность импульса}$$

$$\sin(k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2})$$

$$\underline{\hat{A}}_0 := a_0 + j \cdot b_0 \quad A_0 = 2.667i$$

$$A_k := a_k + j \cdot b_k$$

$$U13(t) := \text{Im} \left[A_0 + \sum_{k=1}^K \left(A_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot t} \right) \right]$$

$$B_0 := A_0 \cdot \text{Hu}(0) \quad B_0 = 0$$

$$B_k := A_k \cdot \text{Hu}(j \cdot \omega \cdot k)$$

$$U2(t) := \text{Im} \left[B_0 + \sum_{k=1}^K \left(B_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega \cdot t} \right) \right]$$

$$\underline{\hat{\Omega}} := 0, \frac{\omega p}{1000} \dots 35 \cdot \omega p$$

$$t := -T, -T + \frac{T}{1000} \dots T$$

$$a_0 = 0, b_0 = \frac{U}{S}, a_k = 0, b_k = 2 \cdot U_0 \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2})}{k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}}$$

$$A_0 = a_0 + j \cdot b_0$$

$$A_k = a_k + j \cdot b_k$$

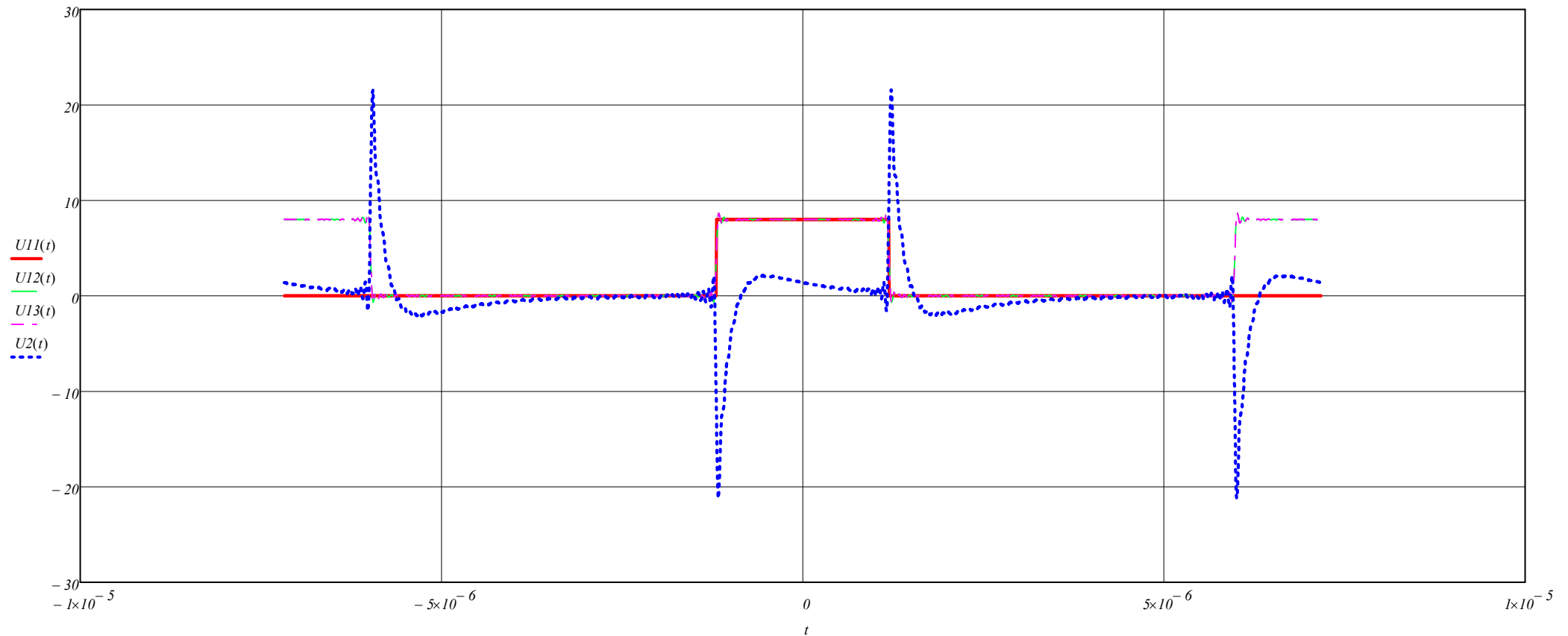
Данная в задании U - амплитуда импульсов.

Однако конечность верхнего предела не позволяет точно задать прямоугольный импульс, поэтому необходимо рассчитать K_{\max} , при котором погрешность заданного импульса относительно прямоугольного не будет превышать 0,05. Это делается по формуле:

$$K_{\max} = 14 \cdot \frac{T}{\tau}. \text{ получается, что достаточно взять } K = 42 \text{ гармоник. Но для более точного}$$

результата в работе гармоники взяты в количестве $K = 100$.

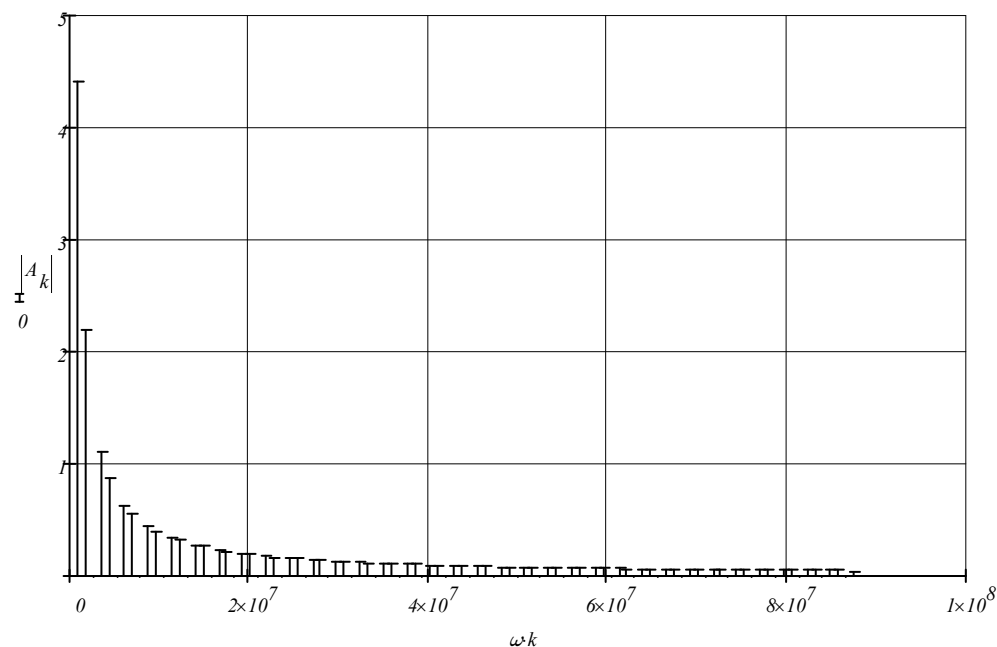
График реакции цепи на заданное воздействие



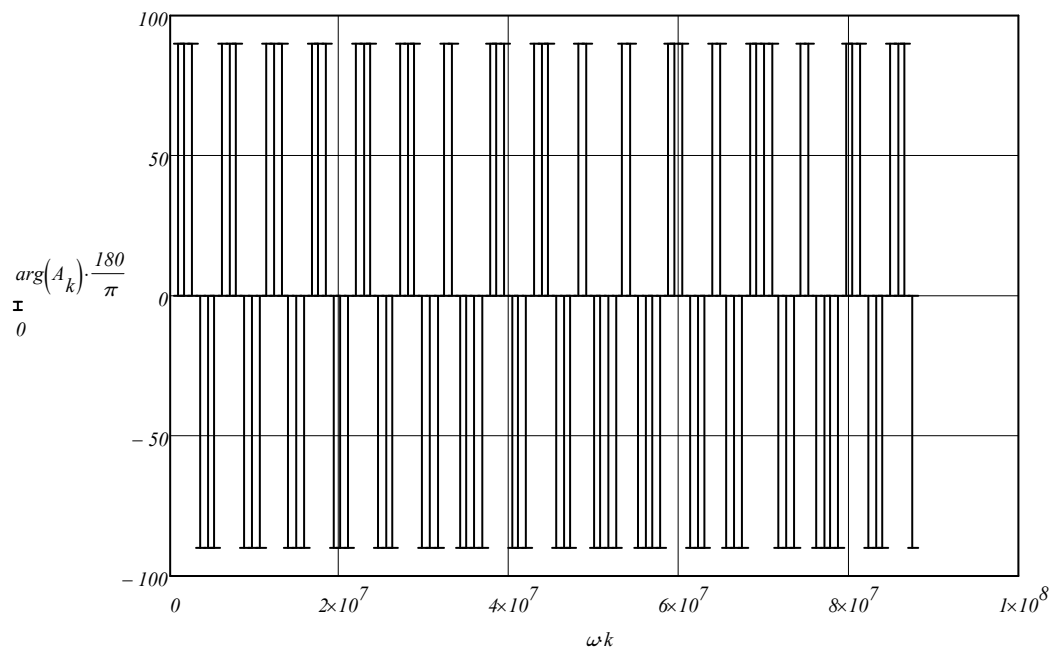
Комплексные коэффициенты ряда Фурье, так же как и определяемые ими амплитуды и начальные фазы гармоник, являются функциями равноотстоящих дискретных значений частоты, кратных основной частоте. Комплексные коэффициенты, рассматриваемые как функции частоты, называют комплексным дискретным спектром; их составляющие, изображаемые графически в зависимости от дискретных значений частоты $A(k \cdot \omega)$ и $\arg(A(k \cdot \omega))$ - амплитудным и фазным дискретным спектром. Графики дискретных спектров состоят из отрезков вертикальных линий, пропорциональных значениям составляющих и расположенных в точках $k \cdot \omega$

Из полученных данных получаем дискретные спектры:

Амплитудный спектр сигнала



Фазный спектр сигнала



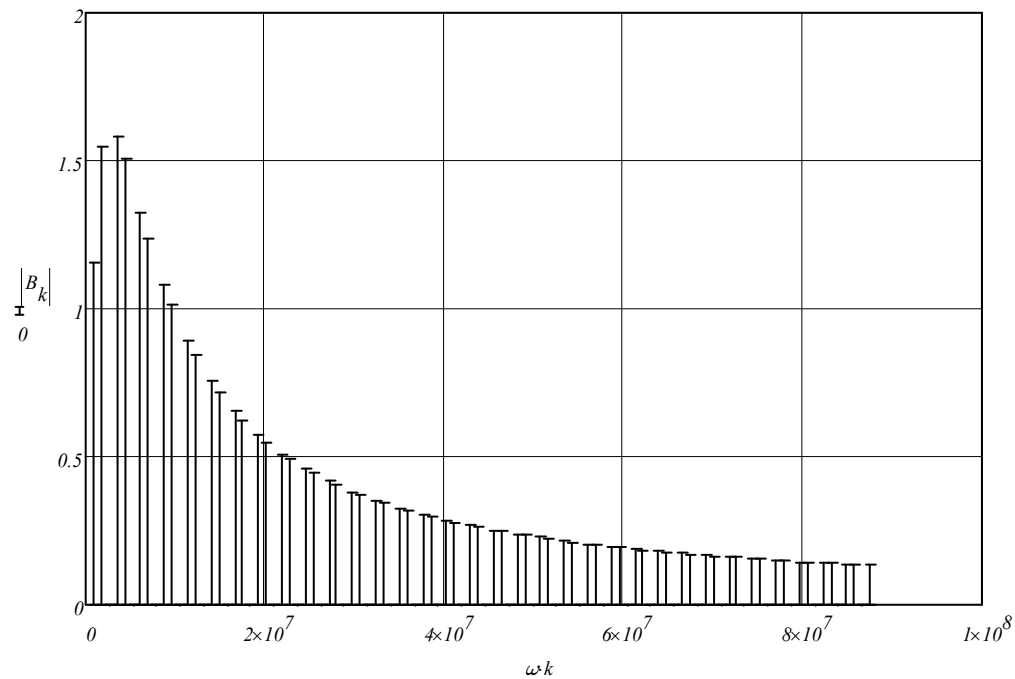
Для расчета спектров выходного воздействия ряд Фурье имеет вид:

$$U_2(t) = \frac{B_0}{2 \cdot j} + \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \sum_{k=1}^K (B_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot t} + \bar{B}_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot k \cdot t})$$

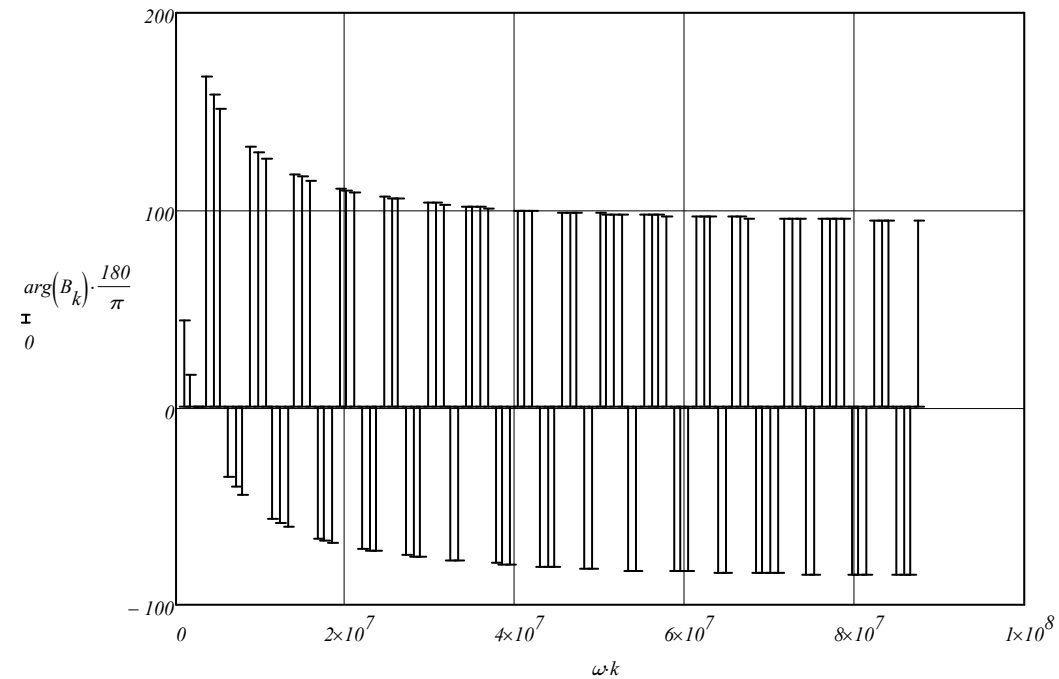
$$\text{или } U_2(t) = \text{Im}(B_0 + \sum_{k=1}^K B_k \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}),$$

где $B_0 = A_0 \cdot H(0)$, $B_k = A_k \cdot H(j \cdot \omega \cdot k)$

Амплитудный спектр реакции



Фазный спектр реакции



Как видно из полученных спектров исследуемый фильтр гасит низкие частоты и пропускает практически без изменений высокие, что является признаком работы ФВЧ.

График АЧХ

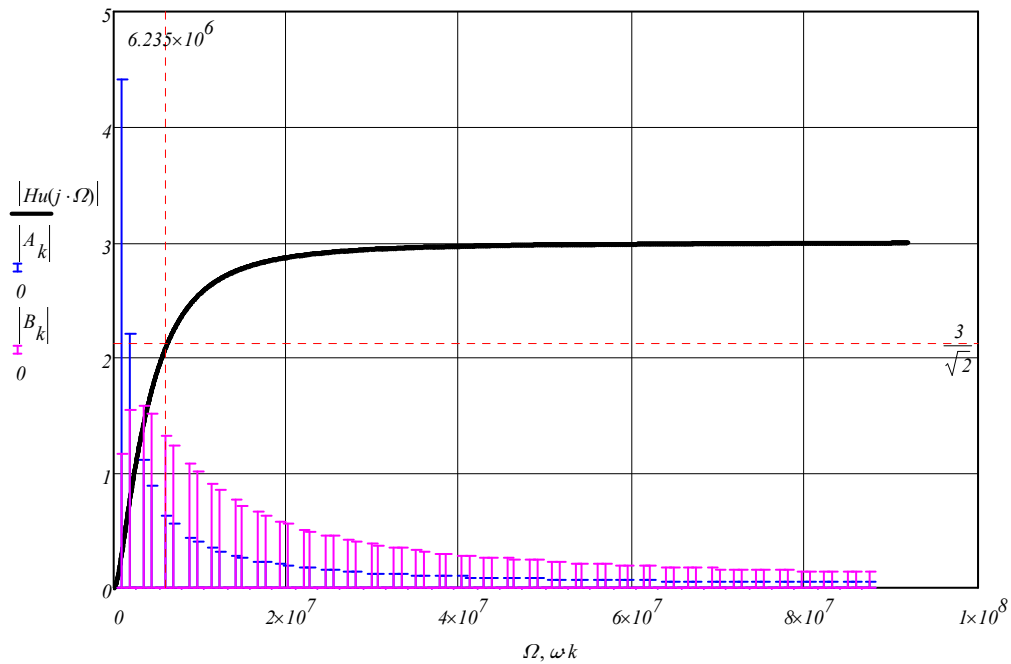
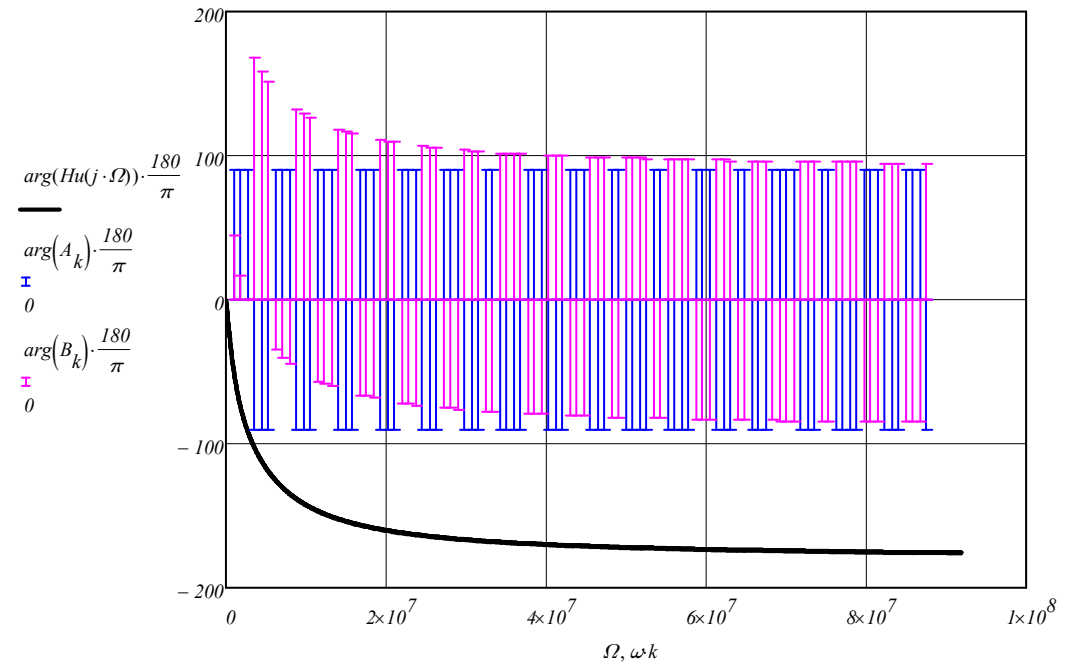


График ФЧХ



Определение частоты среза и полосы пропускания

Полосы пропускания – это диапазоны частот, в которых сигнал не ослабляется. В них численные значения АЧХ $A(\omega)$ относительно велики, а в идеальном случае еще и постоянны.

Диапазоны частот, в которых сигнал подавляется, образуют полосы задерживания. В них численные значения $A(\omega)$ относительно малы, а в идеальном случае равны нулю.

Частота между этими двумя полосами ω_c называется частотой среза.

$f := 1000$

Given

$$|Hu(j \cdot f)| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Find}(f) = 6.235 \times 10^6$$

Частота среза

Полоса пропускания от $6.235 \cdot 10^6$ до ∞

Полоса затухания от 0 до $6.235 \cdot 10^6$

Период в 2 раза больше заданного

$\omega_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := \frac{\omega \mathfrak{p}}{2n}$

$\omega = 4.377 \times 10^5$

$T_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega}$

$T = 1.436 \times 10^{-5}$

$\tau_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := \frac{T}{S}$

$\tau = 4.785 \times 10^{-6}$

$U11(t)_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := \text{if}\left(t < -\frac{\tau}{2}, 0, \text{if}\left(t > \frac{\tau}{2}, 0, U\right)\right)$

$K_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := 100$

$k := 1..K$

$b_0 := \frac{U}{S}$

$b_0 = 2.667$

$a_0 := 0$

$a_k := 0$

$b_k := 2 \cdot U \cdot \tau \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)}{T \cdot k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}}$

$U12(t)_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := b_0 + \sum_{k=1}^K \left(a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t)\right)$

$A_0 := a_0 + j \cdot b_0$

$A_0 = 2.667i$

$A_k := a_k + j \cdot b_k$

$U13(t)_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := \text{Im}\left[A_0 + \sum_{k=1}^K \left(A_k \cdot e^{j \cdot \omega k \cdot t}\right)\right]$

$B_0 := A_0 \cdot Hu(0)$

$B_0 = 0$

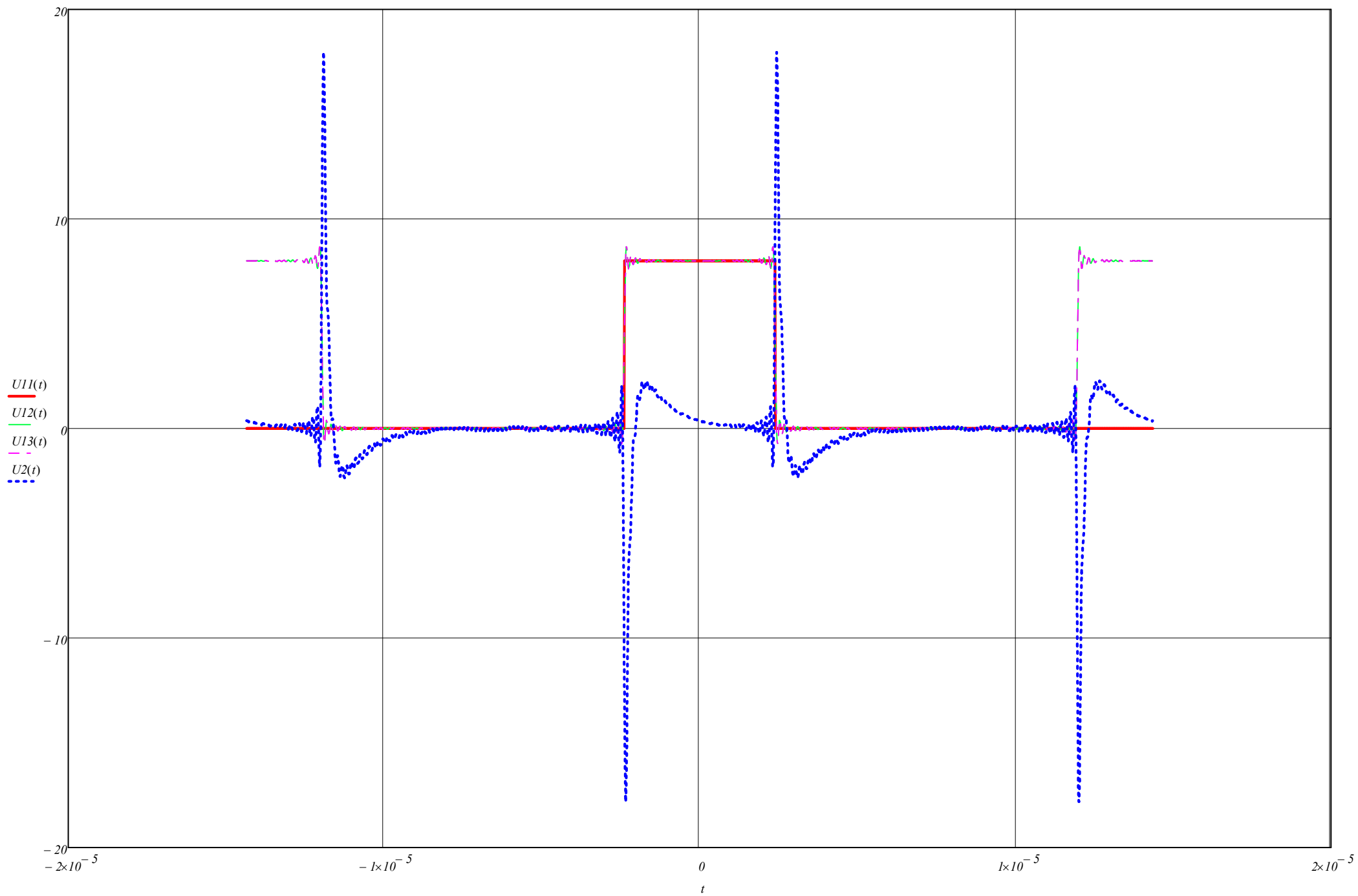
$B_k := A_k \cdot Hu(j \cdot \omega k)$

$U2(t)_{\textcolor{green}{\text{WWW}}} := \text{Im}\left[B_0 + \sum_{k=1}^K \left(B_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega t}\right)\right]$

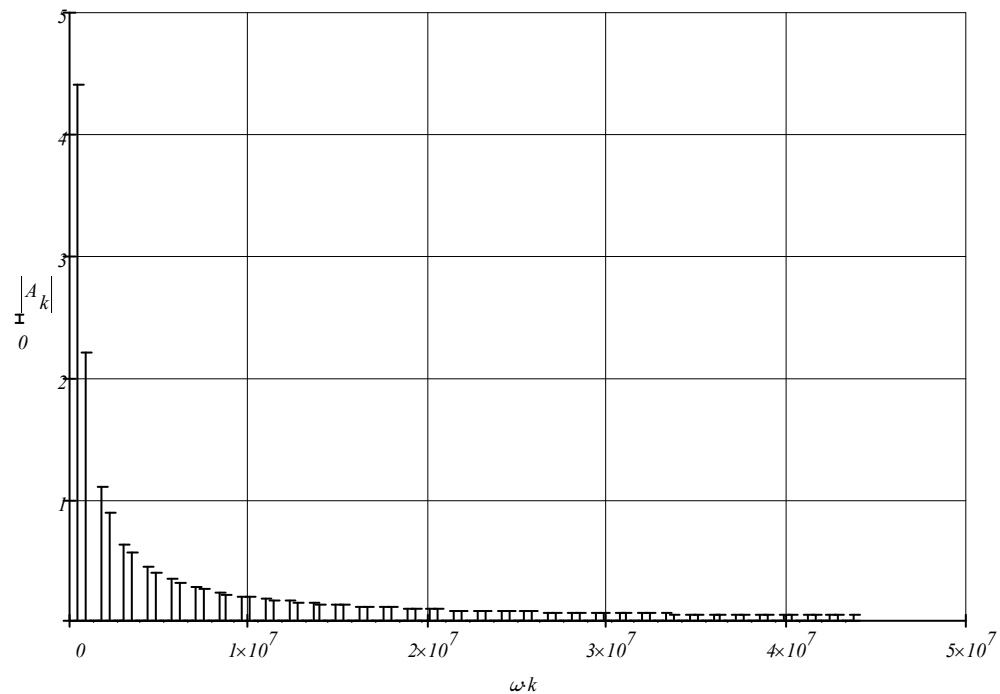
$\Omega := 0, \frac{\omega \mathfrak{p}}{1000} .. 10 \cdot \omega \mathfrak{p}$

$t := -T, -T + \frac{T}{1000} .. T$

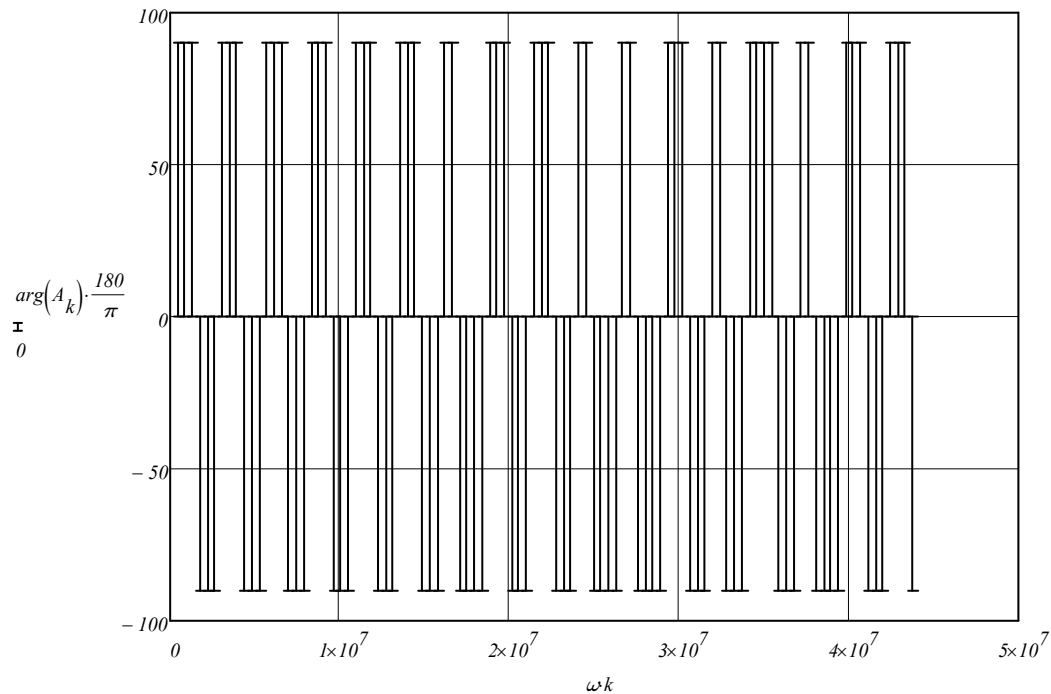
График реакции цепи на заданное воздействие



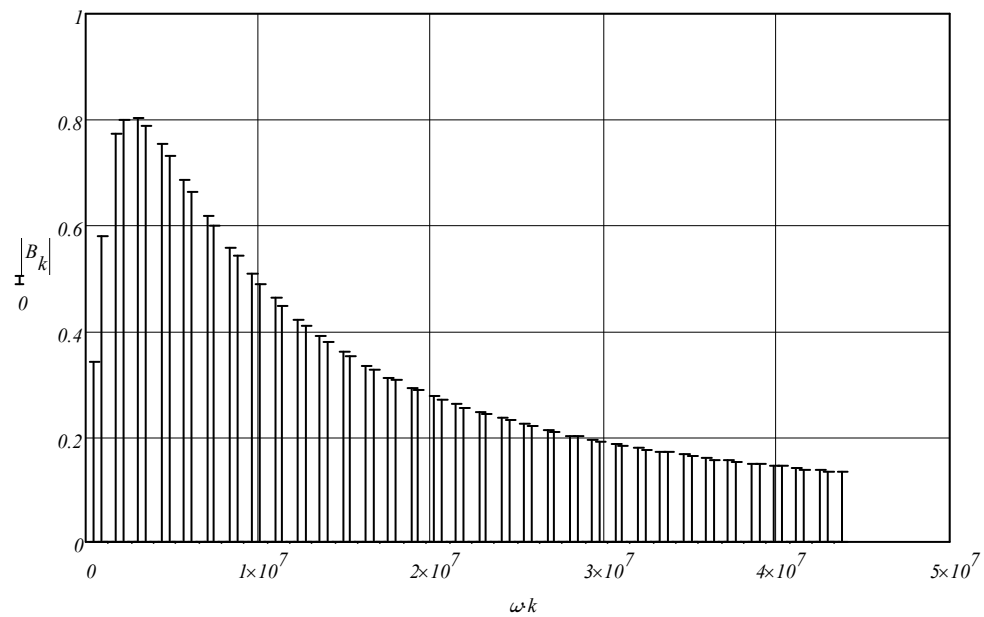
Амплитудный спектр сигнала



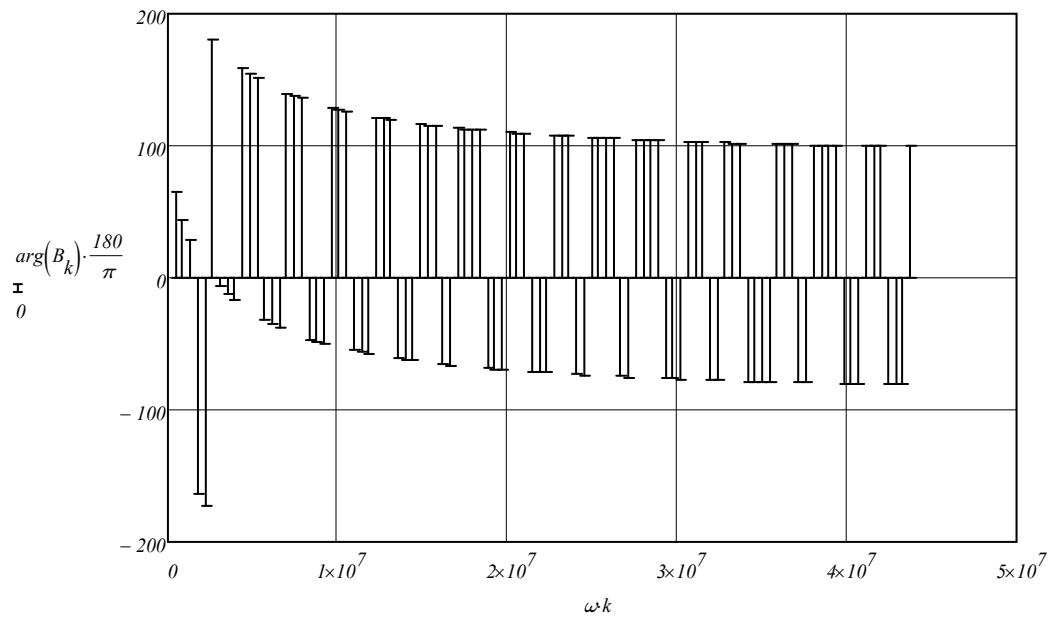
Фазный спектр сигнала



Амплитудный спектр реакции



Фазный спектр реакции



Период в 2 раза меньше заданного

$$\omega := \frac{2 \omega p}{n}$$

$$\omega = 1.751 \times 10^6$$

$$T := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

$$T = 3.589 \times 10^{-6}$$

$$\tau := \frac{T}{S}$$

$$\tau = 1.196 \times 10^{-6}$$

$$U11(t) := if \left(t < -\frac{\tau}{2}, 0, if \left(t > \frac{\tau}{2}, 0, U \right) \right)$$

$$K := 100$$

$$k := 1..K$$

$$b_0 := \frac{U}{S}$$

$$b_0 = 2.667$$

$$a_0 := 0$$

$$a_k := 0$$

$$b_k := 2 \cdot U \cdot \tau \cdot \frac{\sin \left(k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2} \right)}{T \cdot k \cdot \omega \cdot \frac{\tau}{2}}$$

$$U12(t) := b_0 + \sum_{k=1}^K \left(a_k \cdot \sin(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) \right)$$

$$A_0 := a_0 + j \cdot b_0$$

$$A_0 = 2.667i$$

$$A_k := a_k + j \cdot b_k$$

$$U13(t) := Im \left[A_0 + \sum_{k=1}^K \left(A_k \cdot e^{j \cdot \omega k \cdot t} \right) \right]$$

$$B_0 := A_0 \cdot Hu(0)$$

$$B_0 = 0$$

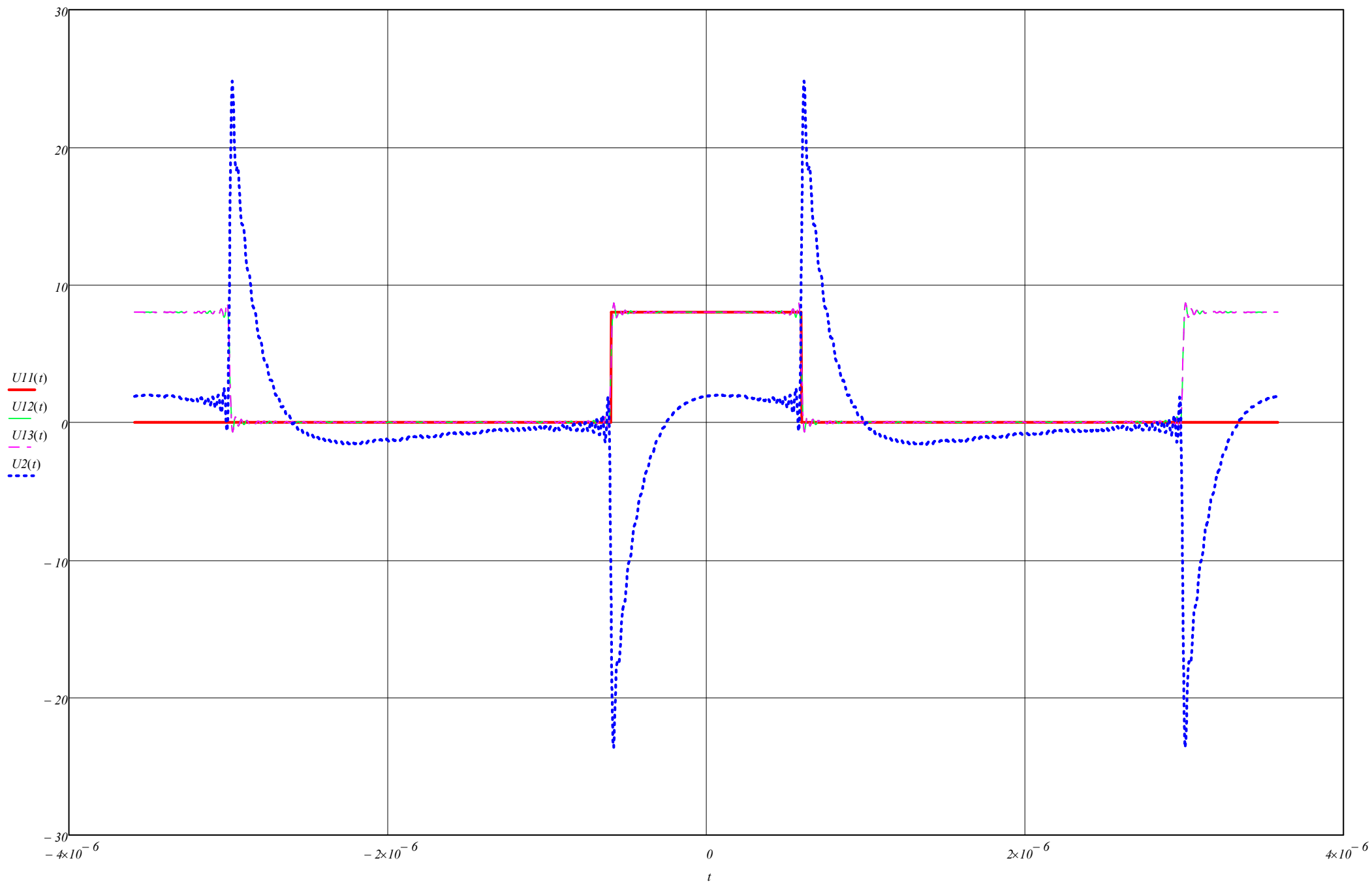
$$B_k := A_k \cdot Hu(j \cdot \omega k)$$

$$U2(t) := Im \left[B_0 + \sum_{k=1}^K \left(B_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega t} \right) \right]$$

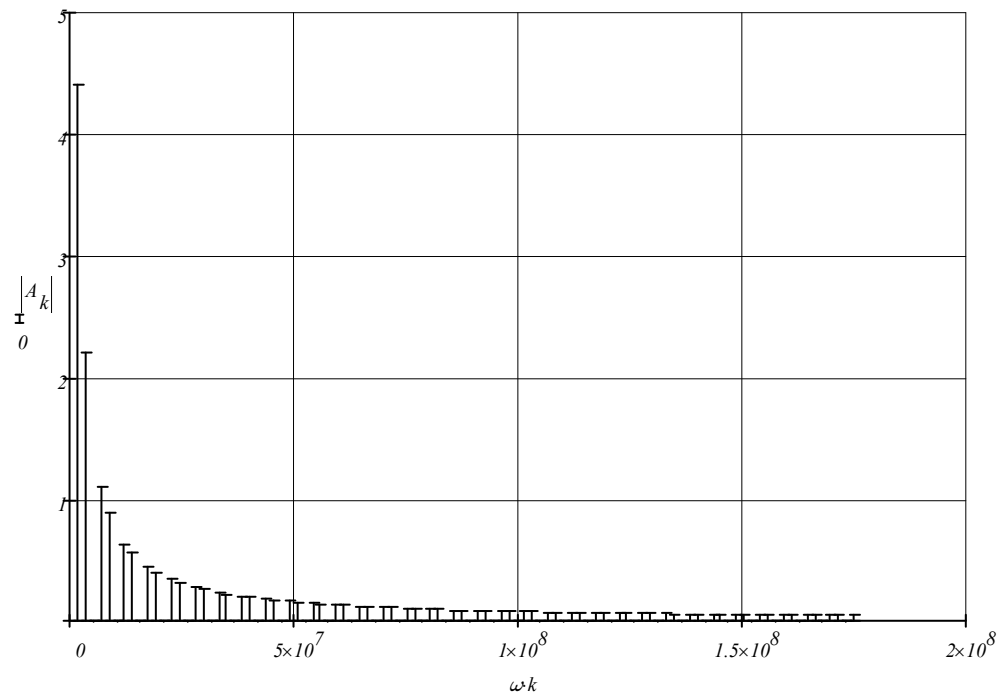
$$\Omega := 0, \frac{\omega p}{1000} .. 10 \cdot \omega p$$

$$t := -T, -T + \frac{T}{1000} .. T$$

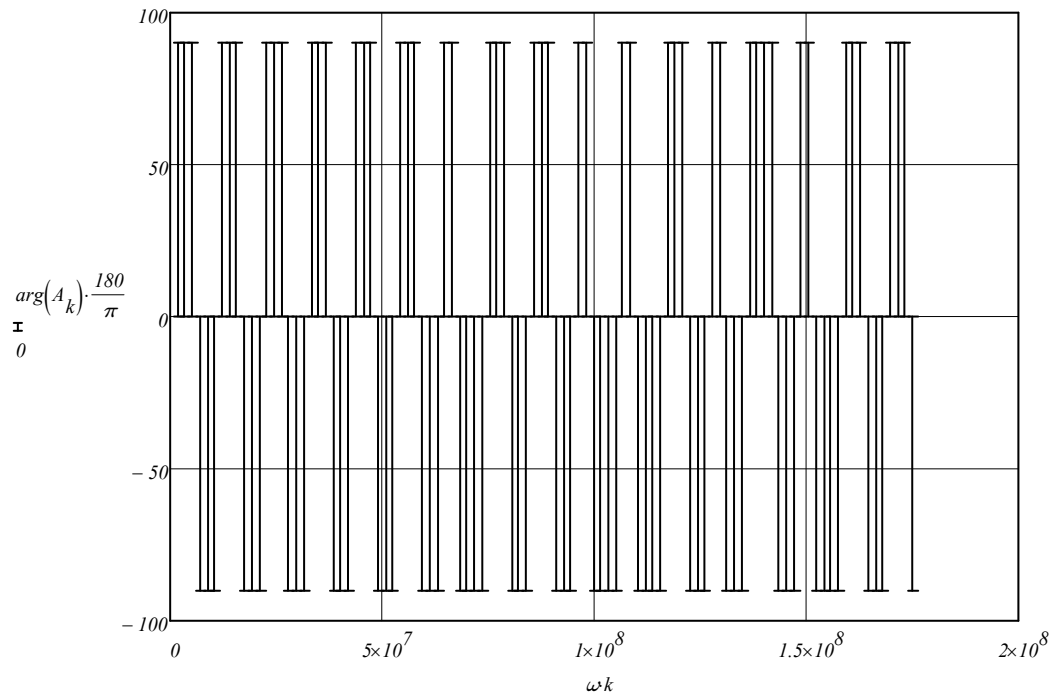
График реакции цепи на заданное воздействие



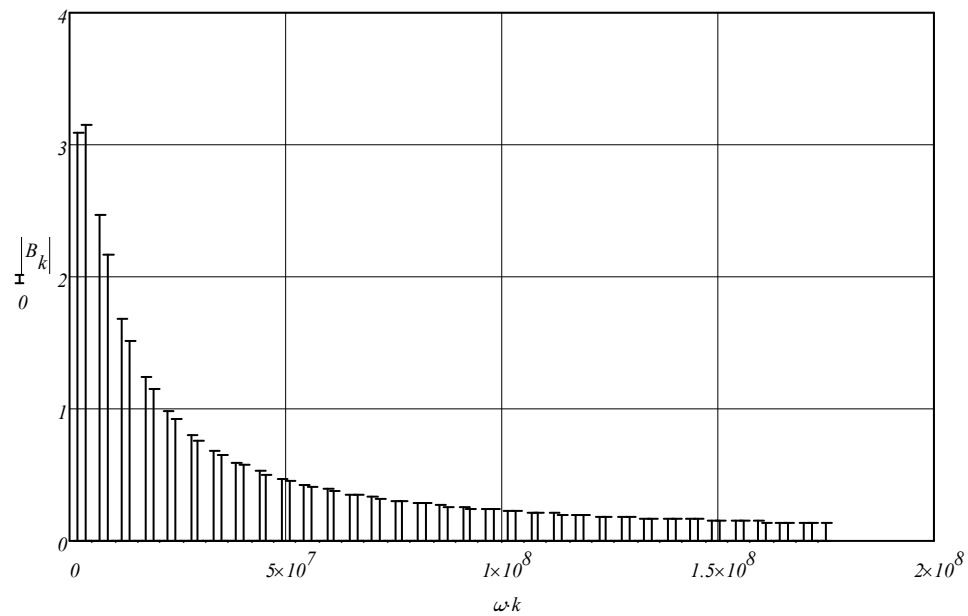
Амплитудный спектр сигнала



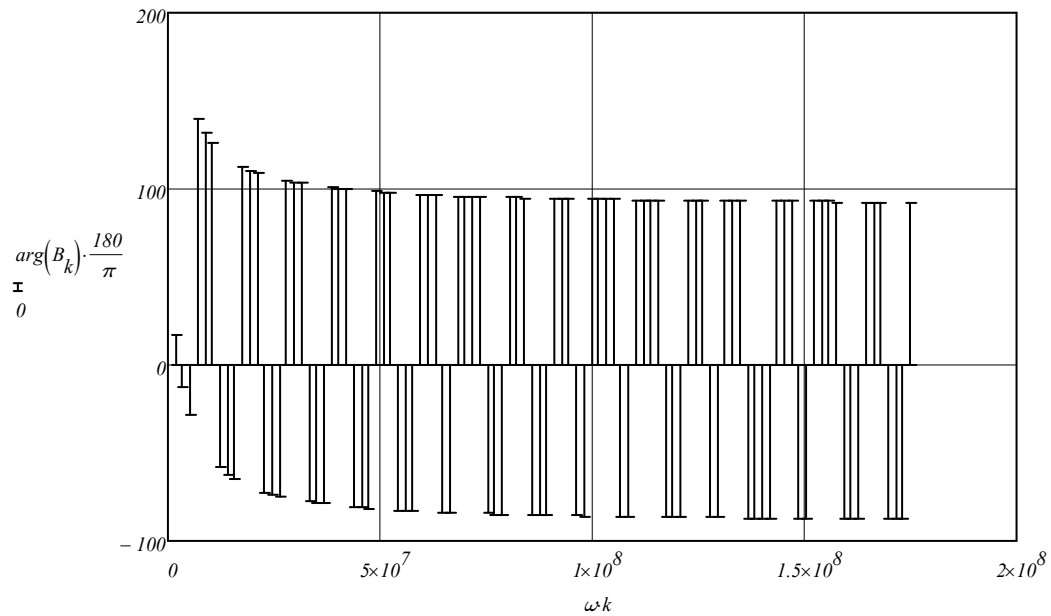
Фазный спектр сигнала



Амплитудный спектр реакции



Фазный спектр реакции



Анализ во временной области

Временные методы определения реакции цепи на произвольное воздействие основаны на интегралах Дюамеля и наложения, в которых используется переходная и импульсная характеристики цепи. Следует учитывать, что реакция цепи определяется при нулевых начальных условиях.

Определение переходной характеристики цепи

Переходной характеристикой $h(t)$ называется функция, описывающая переходной процесс в цепи с нулевыми начальными условиями при подключении ее к источнику единичного ступенчатого воздействия.

Расчетная формула для переходной характеристики имеет вид:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right]$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\frac{R_3}{R_2} \cdot p^2}{p^2 + \frac{C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2} \cdot p + \frac{1}{C_1 \cdot C_2 \cdot R_1 \cdot R_2}} \rightarrow -\frac{3.0 \cdot p^2}{7.1724137931034482759e6 \cdot p + p^2 + 6.8965517241379310345e12} \\ & 7.1724137931034482759e6 \cdot p + p^2 + 6.8965517241379310345e12 \text{ solve } p \rightarrow \begin{pmatrix} -1.1440094883274795436e6 \\ -6.0284043047759687323e6 \end{pmatrix} \\ & -\frac{3.0 \cdot p^2}{(p + 1.1440094883274795436e6)(p + 6.0284043047759687323e6)} \\ & -\frac{3.0 \cdot p^2}{(p + 1.1440094883274795436e6)(p + 6.0284043047759687323e6) \cdot p} \\ & 0.70265172942712969392 \cdot e^{-1.1440094883274795436e6 \cdot t} - 3.7026517294271296939 \cdot e^{-6.0284043047759687323e6 \cdot t} \end{aligned}$$

$$h(t) := 0.70265172942712969392 \cdot e^{-1.1440094883274795436e6 \cdot t} - 3.7026517294271296939 \cdot e^{-6.0284043047759687323e6 \cdot t} \quad \text{Переходная функция}$$

Определение импульсной характеристики

Импульсная характеристика — $h\delta(t)$ — функция, описывающая переходной процесс в цепи с нулевыми начальными условиями при подключении ее к источнику единичного импульсного воздействия.

Импульсная характеристика для ФВЧ находится как производная от переходной характеристики:

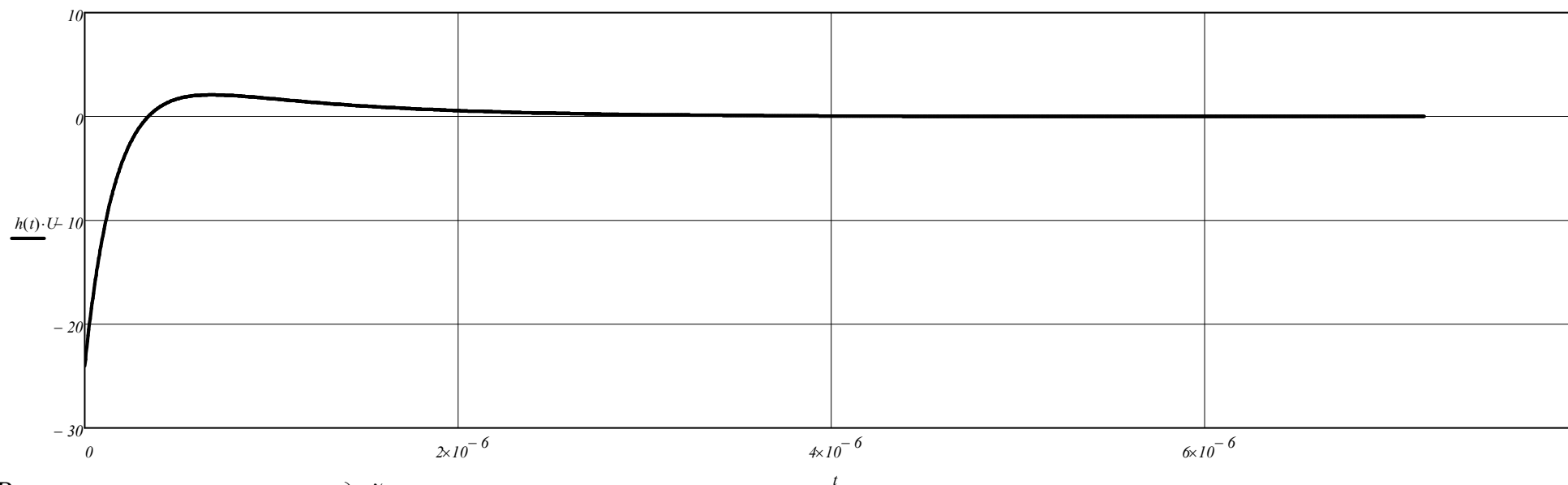
$$\begin{aligned} & -803840.245454349242114 \cdot e^{-1.1440094883274795436e6 \cdot t} + 2.232108162476469407e7 \cdot e^{-6.0284043047759687323e6 \cdot t} \\ h\delta(t) & := -803840.245454349242114 \cdot e^{-1.1440094883274795436e6 \cdot t} + 2.232108162476469407e7 \cdot e^{-6.0284043047759687323e6 \cdot t} \quad \text{Импульсная функция} \end{aligned}$$

Реакция на ступенчатое воздействие

Исходя из полученной переходной характеристики, график реакции цепи на ступенчатое воздействие имеет вид:

$$t := 0, \frac{T}{1000} .. 2 \cdot T$$

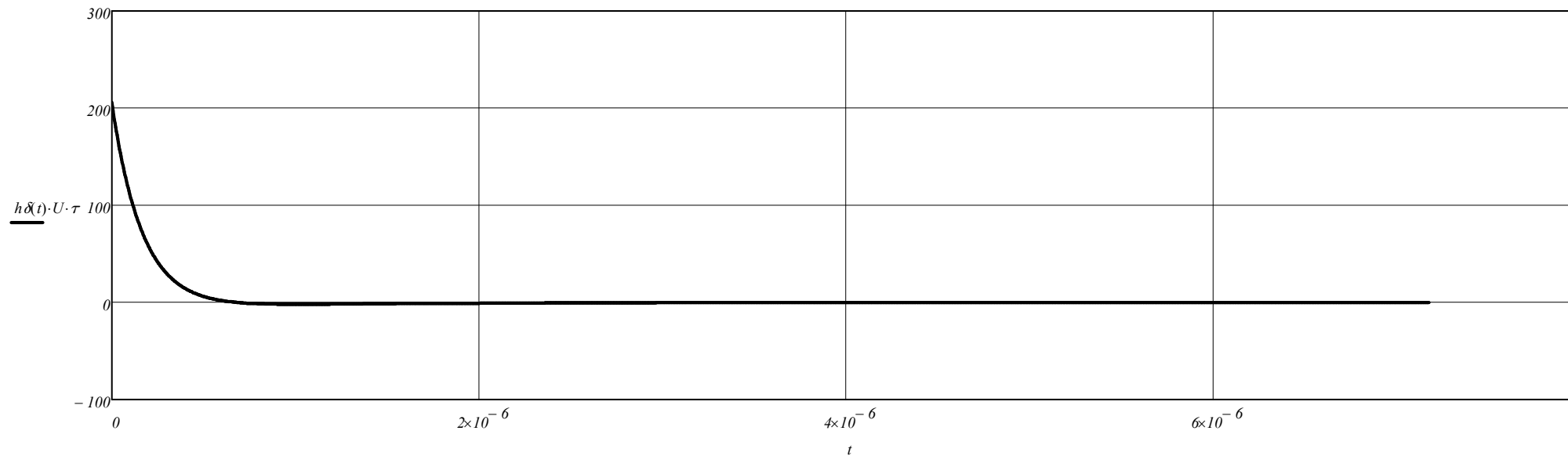
График реакции цепи на ступенчатое воздействие амплитудой U



Реакция на импульсное воздействие

Исходя из полученной импульсной характеристики, график реакции цепи на заданный импульс площадью $U_0 \cdot \tau$ имеет вид:

График реакции цепи на импульсное воздействие площадью $U\tau$



Реакция на импульс

Для расчета реакции на непериодический импульс с помощью переходной характеристики фильтра воспользуемся интегралом Дюамеля (или наложения), который имеет следующий общий вид:

$$U_{21}(t) = U_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t \frac{dU_1(t)}{dt} \cdot h(t - \tau) d\tau,$$

где $U_1(t)$ - заданное воздействие произвольной формы

$U_{21}(t)$ - реакция цепи на данное воздействие

Интегралом Дюамеля можно рассчитать реакцию цепи на произвольное воздействие, поэтому для расчета именно непериодического импульсного воздействия необходимо учесть, что до и после подачи импульса входного воздействия нет.

Для импульсного непериодического воздействия $U_1(t) = \text{if}(t < 0, 0, \text{if}(t < \tau, U, 0))$, заданного при предыдущих расчетах, функция реакции цепи примет вид (с учетом того, что подан именно импульс):

Функция реакции на непериодический прямоугольный импульс амплитудой U_0 и длительностью τ , выраженная с помощью импульсной характеристики фильтра имеет вид:

$$U_{22}(t) = U_1(t) \cdot h(0) + \int_0^t U_1(x) \cdot h\delta(t - x) dx,$$

где в качестве функции импульса взята уже известная функция $U_1(t)$.

$$\tau_{\text{дл}} := 2.393 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{Heaviside}(t) := \text{if}(t < 0, 0, 1)$$

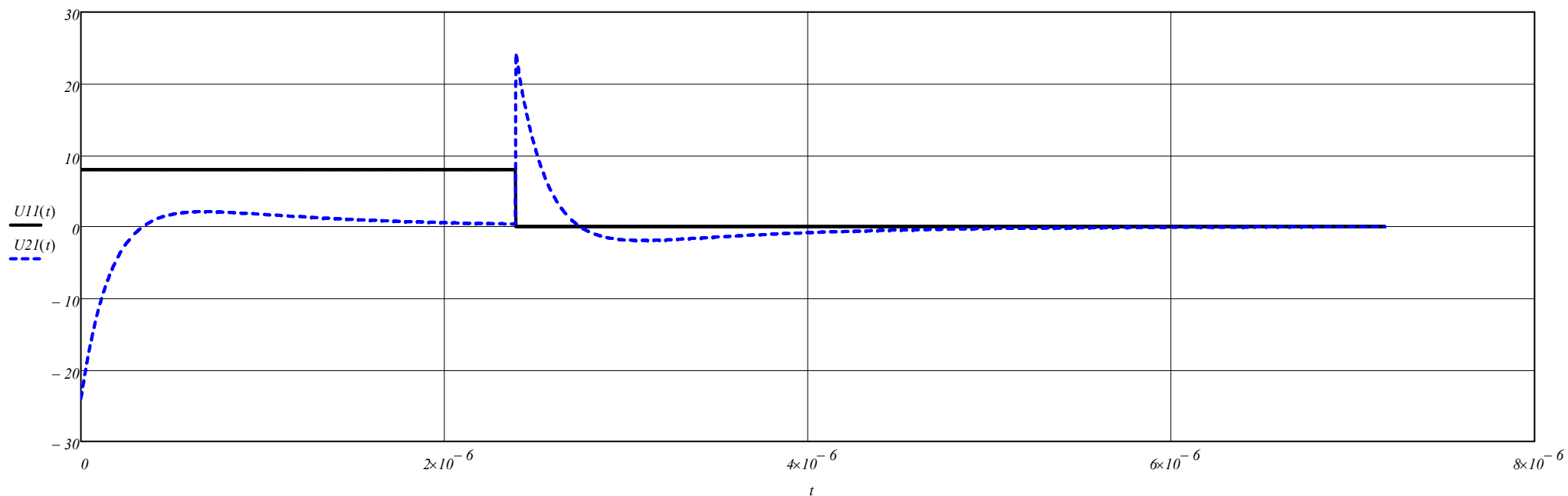
$$U11(t) := U \cdot (\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - \tau))$$

$$U21(t) := U \cdot (h(t) \cdot \text{Heaviside}(t) - h(t - \tau) \cdot \text{Heaviside}(t - \tau))$$

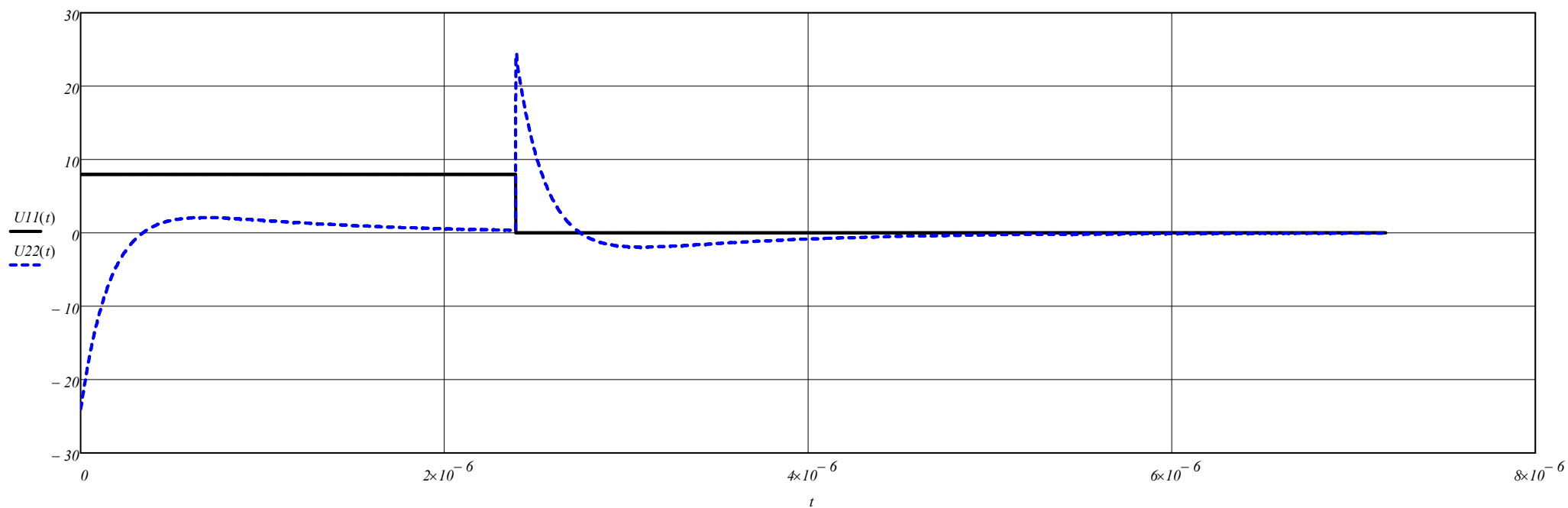
$$U22(t) := U11(t) \cdot h(0) + \int_0^t U11(T) \cdot h\delta(t - T) dT$$

$$t := 0, \frac{T}{1000} .. 2 \cdot T$$

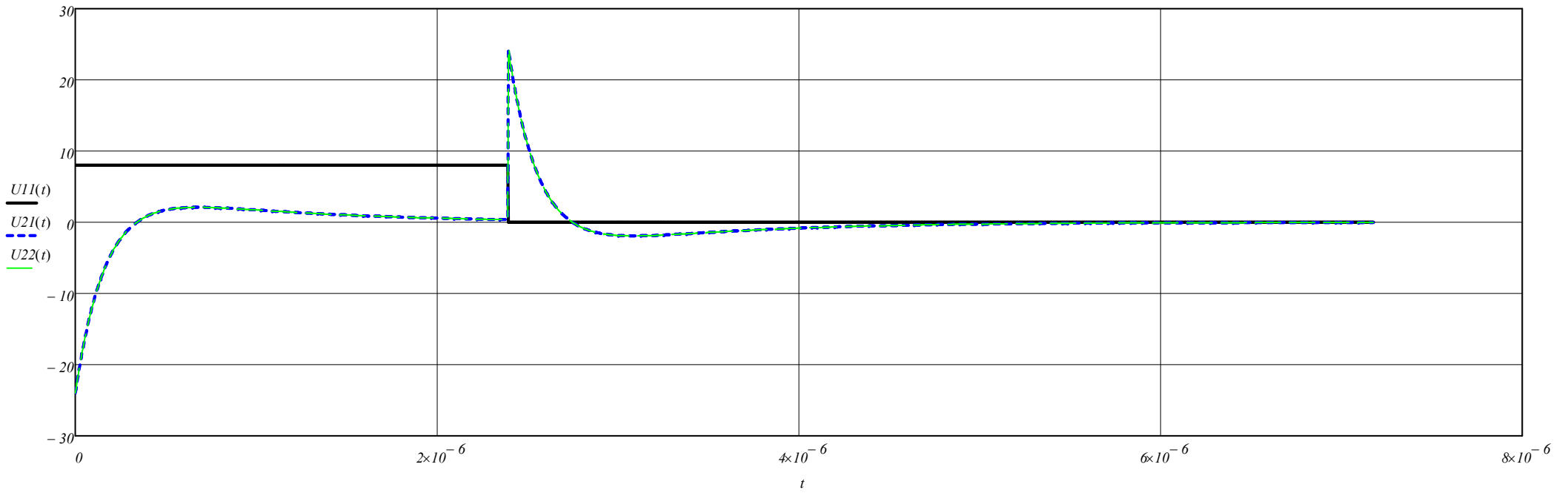
Реакция цепи на непериодич. прямоугол. импульс ампл. U и длит. импульса t_u с помощью переходной функции фильтра



Реакция цепи на непериодич. прямоугол. импульс ампл. U и длит. импульса t_u с помощью импульсной функции фильтра



Сравним полученные результаты



Как видно из графика, результаты расчета реакции с помощью импульсной и переходной характеристик полностью совпали. Однако необходимо заметить, что импульсная характеристика дала более точный результат, а результат, полученный интегралом наложения, пришлось умножить на функцию Хевисайда с поправкой на сдвиг, чтобы сгладить неточности, появившиеся из-за универсальности данного способа расчета.

$$\omega_{\mathfrak{M}}:=\frac{\omega \mathfrak{p}}{n}\qquad \omega=8.754\times 10^5$$

$$T_{\mathfrak{M}}:=2\cdot\frac{\pi}{\omega}\qquad T=7.178\times 10^{-6}$$

$$\tau=2.393\times 10^{-6}$$

$$Hu(p):=-\frac{\frac{R_3}{R_2}\cdot p^2}{p^2+\frac{C_I\cdot R_I+C_2\cdot R_I+C_2\cdot R_2}{C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2}\cdot p+\frac{I}{C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2}}$$

$$U11(t):=if\bigg(t<-\frac{\tau}{2},0,if\bigg(t>\frac{\tau}{2},0,U\bigg)\bigg)$$

$$K_{\mathfrak{M}}:=1050$$

$$k:=1..K$$

$$b_0:=\frac{U}{S}\qquad b_0=2.667$$

$$b_k:=2\cdot U\cdot \tau\cdot \frac{\sin\left(k\cdot \omega\cdot \frac{\tau}{2}\right)}{T\cdot k\cdot \omega\cdot \frac{\tau}{2}}$$

$$U12(t):=b_0+\sum_{k=1}^K\left(a_k\cdot \sin(k\cdot \omega t)+b_k\cdot \cos(k\cdot \omega t)\right)$$

$$A_0:=a_0+j\cdot b_0\qquad A_0=2.667i$$

$$A_k:=a_k+j\cdot b_k$$

$$U13(t):=Im\bigg[A_0+\sum_{k=1}^K\left(A_k\cdot e^{j\cdot \omega k\cdot t}\right)\bigg]$$

$$B_0:=A_0\cdot Hu(0)\qquad B_0=0$$

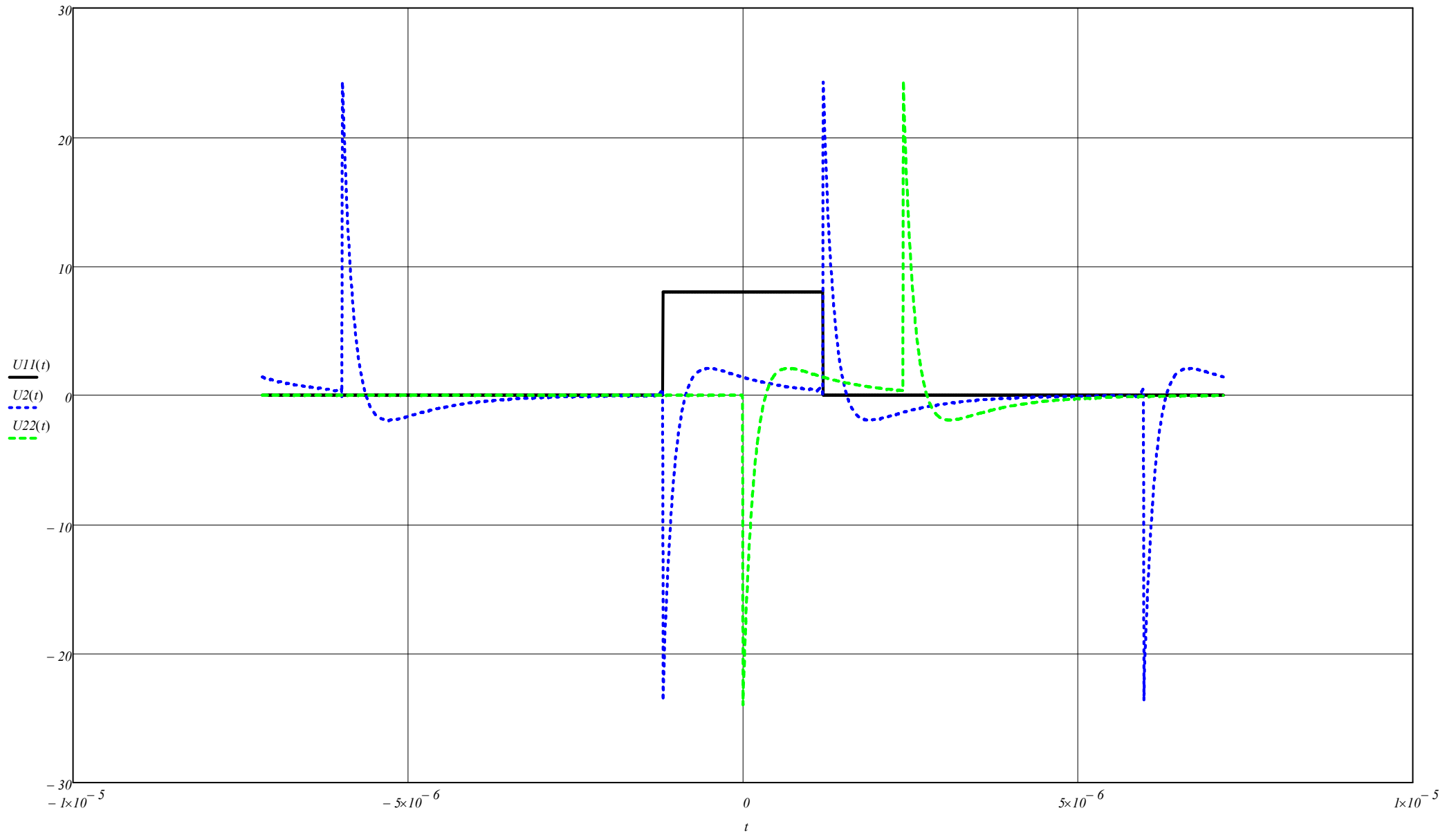
$$B_k:=A_k\cdot Hu(j\cdot \omega k)$$

$$U2(t):=Im\bigg[B_0+\sum_{k=1}^K\left(B_k\cdot e^{j\cdot k\cdot \omega t}\right)\bigg]$$

$$\Omega:=0,\frac{\omega \mathfrak{p}}{1000}..35\cdot \omega \mathfrak{p}$$

$$t:=-T,-T+\frac{T}{1000}..T$$

Сравнение реакции на импульсное воздействие, полученное анализом цепи в частотных и временных областях



Как видно полученные различными методами результаты полностью идентичны. Разница лишь в том, что анализ в частотной области дал результат с запаздыванием на $\frac{\tau}{2}$. Это связано с тем, что импульс при анализе частотной области импульсное воздействие подается на отрезке $\left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right]$, а не на $[0, \tau]$, как при анализе во временной области.

$$\frac{+p\cdot C_2\cdot R_3\cdot U_2-p\cdot C_I\cdot R_I\cdot U_2\cdot k_u-p\cdot C_2\cdot R_I\cdot U_2\cdot k_u-p\cdot C_2\cdot R_2\cdot U_2\cdot k_u+p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2\cdot U_2+p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_3\cdot U_2-p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2\cdot U_2\cdot k_u}{p\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_3\cdot k_u}=p\cdot C_I\cdot U_I$$

$$\frac{l\cdot H_u+p\cdot C_2\cdot R_I\cdot H_u+p\cdot C_2\cdot R_2\cdot H_u+p\cdot C_2\cdot R_3\cdot H_u-p\cdot C_I\cdot R_I\cdot H_u\cdot k_u-p\cdot C_2\cdot R_I\cdot H_u\cdot k_u-p\cdot C_2\cdot R_2\cdot H_u\cdot k_u+p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2\cdot H_u+p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_3\cdot H_u-p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2\cdot H_u\cdot k_u}{p\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_3\cdot k_u}=p\cdot C_I$$

$$\frac{p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_3\cdot k_u}{R_2+p\cdot C_2\cdot R_3-p\cdot C_I\cdot R_I\cdot k_u-p\cdot C_2\cdot R_I\cdot k_u-p\cdot C_2\cdot R_2\cdot k_u+p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2+p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_3-p^2\cdot C_I\cdot C_2\cdot R_I\cdot R_2\cdot k_u+l}$$